สรุปเนื้อหา
วิชาคณิตศาสตร์
(O-Net)

รศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี
ผศ.ดร.ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เซต

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต

1. การเขียนเซต

1.1 แบบแจกแจงสมาชิก เช่น $\{1,3,5,7,9\}$

1.2 แบบบอกเงื่อนไข เช่น $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10 $\}$

เขียน $x \in A$ แทน "x เป็นสมาชิกของเซต A"

และเขียน $x \notin A$ แทน "x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A"

2. เซตจำกัดและเซตอนันต์

2.1 **เซตจำกัด** คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น $\{-3,1,0,2\}$ เขียนแทนจำนวนสมาชิกของ A ด้วย $n(A)$ เช่น $n\big(\{-3,1,0,2\}\big)=4$

2.2 **เซตอนันต์** คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น $\{1,2,3,\ldots\}$

3. เซตว่างและเอกภพสัมพัทธ์

3.1 **เซตว่าง** คือเซตที่ไม่สมาชิกเลย เขียนแทนด้วย ϕ หรือ $\{\ \}$

3.2 **เอกภพสัมพัทธ์** คือเซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้น มักเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ด้วย U

2. ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

1. สับเซต

A เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และเขียนแทนด้วย $A \subset B$

2. การเท่ากันของเซต

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ 1. สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และ

2. สมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

นั่นคือ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

ข้อสังเกต สำหรับเซต A ใด ๆ

1. $\phi \subset A$
2. $A \subset A$
3. $A \subset U$
4. เรียกสับเซตของ A ที่ไม่เท่ากับ A ว่า **สับเซตแท้**ของ A
5. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $n(A) = m$ แล้ว A จะมีสับเซตแตกต่างกันทั้งหมด 2^m สับเซต

3. เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ นิยามโดย $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1,2,3\}$ จงหา $P(A)$

วิธีทำ $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ข้อสังเกต สำหรับเซต A ใด ๆ

1. $P(A)$ คือเซตที่ประกอบด้วยสับเซตทั้งหมดของ A
2. ถ้า A เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
3. $\phi \in P(A)$ และ $A \in P(A)$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
5. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
6. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

4. การดำเนินการของเซต

1. **อินเตอร์เซกชัน** $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
2. **ยูเนียน** $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
3. **คอมพลีเมนท์** $A' = \{x \mid x \notin A\}$
4. **ผลต่าง** $A - B = \{x \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

ข้อสังเกต สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ

1.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.	$A \cup B = B \bigcup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
6.	$(A')' = A$	
7.	$\phi' = U$	$U' = \phi$
8.	$A \cup \phi = A$ $A - \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$ $\phi - A = \phi$
9.	$U \cup A = U$ $U - A = A'$	$U \cap A = A$ $A - U = \phi$
10.	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \phi$
11.	$A - B = A \cap B'$	
12.	ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$	

จำนวนจริง

1. ผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวน

- จำนวนจริง ($\mathbb{R}$)
  - จำนวนอตรรกยะ ($\mathbb{Q}'$)
  - จำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$)
    - จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม (I')
    - จำนวนเต็ม (I)
      - จำนวนเต็มลบ (I^-)
      - จำนวนเต็มศูนย์ ($\{0\}$)
      - จำนวนเต็มบวก (I^+) หรือจำนวนนับ ($\mathbb{N}$)

2. สมบัติของอสมการ

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
6. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $0 < ac < bd$
7. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

3. ค่าสัมบูรณ์และสมบัติของค่าสัมบูรณ์

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}}$$

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

1. $\sqrt{a^2} = |a|$
2. $|a| \geq 0$
3. $|a| = |-a|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
6. $|a|^2 = a^2$
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$
8. ถ้า $a > 0$ แล้ว

   8.1 $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

   8.2 $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

   8.3 $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

   8.4 $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

4. การแก้อสมการที่แยกตัวประกอบได้

1. ถ้าจะคูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยค่าคงตัวหรือนิพจน์ จะต้องตรวจสอบว่าค่าคงตัวหรือนิพจน์นั้นมีค่าเป็นบวกหรือลบอย่างใดอย่างหนึ่งและอาจต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการให้เหมาะสม

2. พยายามจัดให้ข้างหนึ่งของอสมการเป็น 0 แล้วจึงแยกตัวประกอบ

3. เนื่องจากจำนวนจริงที่ยกกำลังด้วยเลขคี่จะมีเครื่องหมายคงเดิม และจำนวนจริงที่ยกกำลังคู่จะมีค่าเป็นศูนย์หรือบวกเท่านั้น จึงสามารถพิจารณาอสมการที่แยกตัวประกอบแล้วบางวงเล็บมีเลขยกกำลังได้ดังนี้

   3.1 ถ้าวงเล็บใดยกกำลังด้วยเลขคี่ ให้แก้อสมการเสมือนหนึ่งว่าวงเล็บนั้นยกกำลังหนึ่ง

   3.2 ถ้าวงเล็บใดยกกำลังด้วยเลขคู่ ให้ตัดวงเล็บนั้นออกไปจากการพิจารณาก่อน แต่เมื่อได้คำตอบแล้ว จะต้องพิจารณาอีกครั้งว่าวงเล็บที่ตัดออกไปก่อนนั้นมีผลต่อเซตคำตอบหรือไม่ แล้วจึงปรับคำตอบให้ถูกต้อง

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) ของ A และ B คือ

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ข้อสังเกต โดยทั่วไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$ แต่ $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A)\,n(B)$

2. ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์จาก A ไป B คือ สับเซตของ $A \times B$

ข้อสังเกต

1. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดแล้วจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B คือ $2^{n(A)n(B)}$

2. ϕ เป็นความสัมพันธ์เสมอ

3. โดเมนและเรนจ์

1. โดเมน (Domain)

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ $D_r = \{x \in A \mid \text{ มี } y \in B \text{ ที่ทำให้ } (x,y) \in r\}$

2. เรนจ์ (Range)

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ $R_r = \{y \in B \mid \text{ มี } x \in A \text{ ที่ทำให้ } (x,y) \in r\}$

ข้อสังเกต

1. เราอาจมองอย่างง่าย ๆ ได้ว่า D_r ก็คือเซตของสมาชิกตำแหน่งแรกของ r และ R_r ก็คือเซตของสมาชิกตำแหน่งหลังของ r

2. ในการหา D_r นั้น เราจะเขียนสมการในรูป $y = f(x)$ แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

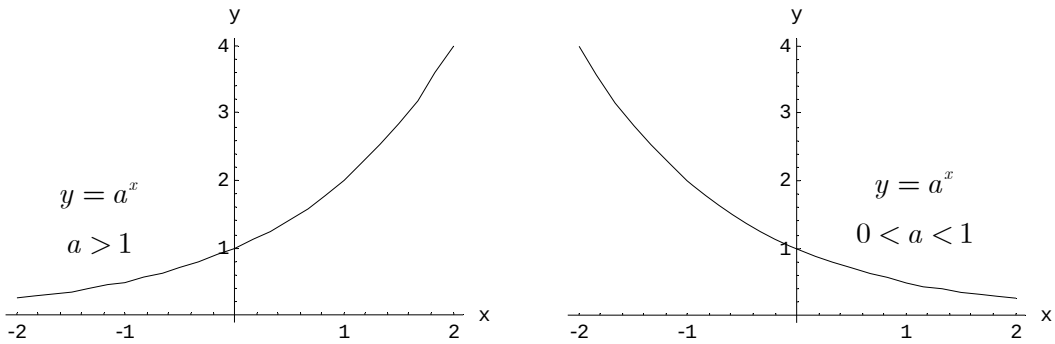
3. ในการหา R_r นั้น เราจะเขียนสมการในรูป $x = g(y)$ แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

4. ฟังก์ชัน

เรียกความสัมพันธ์ r ว่าเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ทุกคู่ลำดับในความสัมพันธ์นั้นไม่มีสมาชิกตำแหน่งแรกซ้ำกัน

5. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$



ข้อสังเกต

1. กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ

2. $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}^+$ นั่นคือ $D_{\exp} = \mathbb{R}$ และ $R_{\exp} = \mathbb{R}^+$

3. $a^x > 0$ เสมอ (เมื่อ $a > 0$)

4. ถ้า $a > 1$ แล้ว a^x จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 < x_2$

5. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว a^x จะเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 > x_2$

ลำดับและอนุกรม

1. ลำดับ

ลำดับเป็นชุดของตัวเลขที่เขียนเรียงต่อกันอย่างมีลำดับ ซึ่งอาจมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัดหรืออาจมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ก็ได้

ลำดับจำกัดที่มี n พจน์จะอยู่ในรูป $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

2. อนุกรม

ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับหนึ่ง

ลำดับของผลบวกย่อย n พจน์แรกของลำดับ a_n คือ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

อนุกรมอนันต์ของลำดับอนันต์ a_n คือ $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ เมื่อผลบวกมีค่า

ข้อสังเกต $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$

3. ลำดับเลขคณิตและอนุกรมเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือลำดับซึ่ง $a_{n+1} - a_n$ เป็นค่าคงตัว สำหรับทุกจำนวนนับ n

เรียก $d = a_{n+1} - a_n$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **ผลต่างร่วม**

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตคือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

ตัวอย่าง ให้ $-3, 1, 5, 9, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต จงหาพจน์ที่ n และผลบวก n พจน์แรก

วิธีทำ ผลต่างร่วม $d = 1 - (-3) = 4$ ดังนั้น $a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)(4) = 4n - 7$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)4] = n(2n-5)$

4. ลำดับเรขาคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือลำดับซึ่ง $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เป็นค่าคงตัว สำหรับทุกจำนวนนับ n

เรียก $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **อัตราส่วนร่วม**

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตคือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ความน่าจะเป็น

1. กฎการนับเบื้องต้น

1. กฎการคูณ

การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งเป็น k ขั้นตอนย่อย ที่ทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ วิธี ตามลำดับ

จะมีจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้นทั้งหมด $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$ วิธี

2. กฎการบวก

การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งเป็น k กรณีย่อยที่ไม่ซ้ำกัน ที่ทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ วิธี ตามลำดับ

จะมีจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้นทั้งหมด $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

2. แฟกทอเรียล (Factorial)

$0! = 1$ และ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ เมื่อ $n \geq 1$

ข้อสังเกต $n(n+1)(n+2)\cdots(n+m) = \dfrac{(n+m)!}{n!}$

3. ความน่าจะเป็น

1. การทดลองสุ่ม คือการทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกผลการทดลองในแต่ละครั้งได้อย่างถูกต้องแน่นอน
2. แซมเปิลสเปซ (sample space) คือเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม
3. เหตุการณ์ (event) คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ

ถ้า S เป็นเซมเปิลสเปซซึ่งประกอบด้วย**สมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน** แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

ข้อสังเกต

1. $0 \leq P(E) \leq 1$ สำหรับเหตุการณ์ E ใด ๆ
2. $P(\phi) = 0$ และ $P(S) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   ในกรณีที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จะได้ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกันแล้ว $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
   เหตุการณ์จะเป็นอิสระต่อกัน เมื่อการเกิดของเหตุการณ์หนึ่งไม่มีผลกระทบถึงอีกการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง
5. ถ้า A' เป็นคอมพลีเมนต์ของ A จะได้ $P(A') = 1 - P(A)$

สถิติ

1. การวัดค่ากลางของข้อมูล

ลำดับ	ค่ากลาง	สูตร	ข้อสังเกต
1.	**ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** (arithmetic mean) หรือ $\overline{x}$	$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	1. $\sum_{i=1}^{N} x_i = N\overline{x}$ 2. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = 0$ 3. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2$ น้อยที่สุดเมื่อ $a = \overline{x}$ 4. ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\overline{y} = a\overline{x} + b$ 5. $x_{\min} \le \overline{x} \le x_{\max}$
2.	**มัธยฐาน** (median) หรือ Me	Me = ค่าของข้อมูลตำแหน่งตรงกลางเมื่อเรียงลำดับข้อมูลแล้ว	$a = Me$ ทำให้ $\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i - a\rvert$ น้อยที่สุด
3.	**ฐานนิยม** (mode) หรือ Mo	Mo = ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด	1. ในกรณีที่มีข้อมูลมีการแจกแจงความถี่อันตรภาคชั้นของทุกชั้นต้องเท่ากัน 2. ข้อมูลคุณภาพนิยมหาค่ากลางโดยวิธีนี้
4.	**ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต** (geometric mean) หรือ G.M.	$G.M. = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}$	1. ข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ต้องทำให้ $\sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}$ มีความหมาย 2. $\log G.M. = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i$ เมื่อ $x_i > 0$
5.	**ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก** (harmonic mean) หรือ $H.M.$	$H.M. = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$	$H.M.$ = ส่วนกลับของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของส่วนกลับของข้อมูลแต่ละตัว
6.	**กึ่งกลางพิสัย** (mid range) หรือ $M.R.$	$M.R. = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$	ถ้าข้อมูลอยู่ในรูปอันตรภาคชั้นเปิดจะหาค่ากลางแบบนี้ไม่ได้

ในกรณีที่ข้อมูลมีการแจกแจงความถี่ ให้ถ่วงน้ำหนักด้วยความถี่ของข้อมูลแต่ละตัวตามความเหมาะสม ยกเว้นมัธยฐานที่ให้คำนวณตามสูตรต่อไปนี้

$$Mo = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) I$$

เมื่อ L = ขีดจำกัดล่างของชั้นที่มีความถี่สูงสุด

I = ความกว้างของชั้นที่มีความถี่สูงสุด

d_1 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าหนึ่งชั้น

d_2 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่สูงกว่าหนึ่งชั้น

ข้อสังเกต ถ้าข้อมูลทุกตัวมีค่าบวกแล้ว $\bar{x} \geq G.M. \geq H.M.$

2. หลักเกณฑ์สำคัญในการใช้ค่ากลางชนิดต่าง ๆ

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางที่ได้จากการนำทุก ๆ ค่าของข้อมูลมาเฉลี่ย แต่มัธยฐานและฐานนิยมเป็นเพียงค่ากลางที่ใช้ตำแหน่งที่ (position) ของข้อมูลบางค่าเท่านั้น

2. ถ้าในจำนวนข้อมูลทั้งหมดมีข้อมูลบางค่าที่มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลอื่น ๆ มาก จะมีผลกระทบกระเทือนต่อการหาค่ากลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต กล่าวคืออาจจะทำให้ค่ากลางที่ได้มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลที่มีอยู่ส่วนใหญ่ แต่จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการหาค่ากลางโดยใช้มัธยฐานหรือฐานนิยม

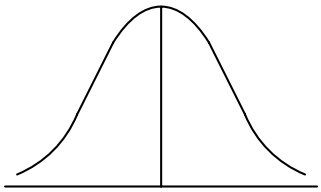
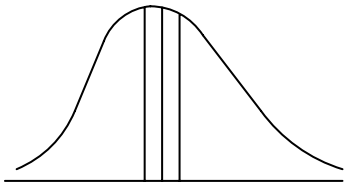
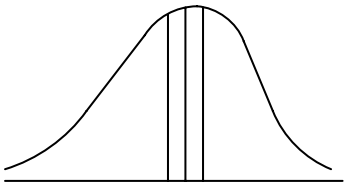
3. มัธยฐานและฐานนิยมใช้เพื่อต้องการทราบค่ากลางของข้อมูลทั้งหมดโดยประมาณและรวดเร็ว ทั้งนี้เนื่องจากการหามัธยฐานและฐานนิยมบางวิธีไม่จำเป็นต้องมีการคำนวณซึ่งอาจใช้เวลามาก

4. ถ้าการแจกแจงความถี่ของข้อมูลประกอบด้วยอันตรภาคชั้นที่มีช่วงปิด อาจเป็นชั้นต่ำสุดหรือชั้นสูงสุดคชั้นใดชั้นหนึ่งหรือทั้งสองชั้น การหาค่ากลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่สามารถหาได้ แต่สามารถหามัธยฐานหรือฐานนิยมได้

5. การแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่มีความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นไม่เท่ากัน อาจจะมีผลทำให้ค่ากลางที่หาได้โดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือฐานนิยมคลาดเคลื่อนไปจากที่ควรจะเป็นได้บ้าง แต่จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการหามัธยฐาน

6. ในกรณีที่ข้อมูลเป็นประเภทข้อมูลคุณภาพ (qualitative data) จะสามารถหาค่ากลางได้เฉพาะฐานนิยมเท่านั้น แต่ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือมัธยฐาน

7. ความสัมพันธ์ของ $\overline{x}$, Me, Mo

โค้งปกติ	โค้งเบ้ขวา	โค้งเบ้ซ้าย
		
$\overline{x} = Me = Mo$ $\overline{x}$	$Mo < Me < \overline{x}$	$\overline{x} < Me < Mo$

3. ควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์

ให้ L = ขีดจำกัดล่างของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

I = ความกว้างของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

$\sum f_L$ = เป็นความถี่สะสมก่อนชั้นที่ค่าสถิติชั้นอยู่

f_i = ความถี่ของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

ค่าสถิติ	ความหมาย	ข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่	ข้อมูลที่แจกแจงความถี่
มัธยฐาน (Median)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น2 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ Me คือ $\frac{N+1}{2}$	ตำแหน่งของ Me คือ $\frac{N}{2}$ $Med = L + I\left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_i}\right)$
ควอร์ไทล์ (Quartile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น4 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ Q_k คือ $\frac{(N+1)k}{4}$	ตำแหน่งของ Q_k คือ $\frac{kN}{4}$ $Q_k = L + I\left(\frac{\frac{kN}{4} - \sum f_L}{f_i}\right)$
เดไซล์ (Decile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น10 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ D_k คือ $\frac{(N+1)k}{10}$	ตำแหน่งของ D_k คือ $\frac{kN}{10}$ $D_k = L + I\left(\frac{\frac{kN}{10} - \sum f_L}{f_i}\right)$
เปอร์เซ็นไทล์ (Percentile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ P_k คือ $\frac{(N+1)k}{100}$	ตำแหน่งของ P_k คือ $\frac{kN}{100}$ $P_k = L + I\left(\frac{\frac{kN}{100} - \sum f_L}{f_i}\right)$

4. การวัดการกระจายของข้อมูล

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์

1.1 พิสัย (Range) $= x_{\max} - x_{\min}$

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $(Q.D.) = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

1.3 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $(M.D.) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{x}|}{N}$

1.4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(s) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}}$

ความแปรปรวน (variance) $= s^2$

ข้อสังเกต

1. ถ้ามีข้อมูล m ชุด และ $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \cdots = \overline{x}_m$ แล้ว

$$s^2_{\text{รวม}} = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2 + \cdots + N_m s_m^2}{N_1 + N_2 + \cdots + N_m}$$

2. ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\overline{y} = a\overline{x} + b$ และ $s_y = |a|\, s_x$

2. การวัดการกระจายสัมพัทธ์

1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$

2. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

3. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \dfrac{M.D.}{\overline{x}}$

4. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \dfrac{s}{\overline{x}}$

ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ 2 (มีนาคม 2548)

ตอนที่ 1 ข้อ 1-5 ข้อละ 2 คะแนน ข้อ 6-10 ข้อละ 3 คะแนน

1. ถ้า $A = \{\varnothing, 0, 1, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}\}$ และ $P(A)$ เป็นเพาเวอร์เซตของ A แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $P(A) - A$ เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า $f(x) = x^2 - 2x + 1$ และ $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 6$ แล้ว $(f \circ g)(6)$ เท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ l_1 เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-2,3)$ และ $(1,7)$ ถ้า l_2 เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(3,-2)$ และขนานกับ l_1 แล้ว ระยะห่างระหว่าง l_1 และ l_2 เท่ากับกี่หน่วย

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x-1 & -x \\ x & x-1 \end{bmatrix}$
ถ้า $\det(2A) = 28$ แล้ว $\det\left(AB^{-1}\right)$ เท่ากับเท่าใด

5. ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่ง $\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$ ถ้า $\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = 340$ และ ค่ามาตรฐานของ x_5 เท่ากับ 0.40 แล้ว x_5 มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ l_1 เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P และ จุด $(-1,1)$ l_2 เป็นเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับ l_1 และผ่านจุด $(5,6)$
ถ้า l_2 มีสมการเป็น $3x + by + c = 0$ แล้ว $b + c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. ถ้า $f(x) = (x^2 - 4x - 5)^2$ และ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $f'(x) < 0$ แล้ว $A \cap [-5,10]$ มีสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหมดกี่จำนวน

8. ถ้า A และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $-2 < \dfrac{3-2x}{4} \le 1$ และ $\dfrac{x+4}{x-5} < 0$ ตามลำดับ แล้ว ผลบวกของสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหมดของ $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

9. ถ้า $\{a,b\}$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $2^{2x+2} - 9\left(2^x\right) = -2$ โดยที่ $a < b$ แล้ว $\log_2 \sqrt{a^2 + 4b^2}$ เท่ากับเท่าใด

10. ในการสอบครั้งหนึ่ง มีข้อสอบทั้งหมด 12 ข้อ นักเรียนต้องทำข้อสอบรวม 8 ข้อ โดยต้องเลือกทำอย่างน้อย 3 ข้อจากข้อ 1 ถึง 6 และเลือกทำอย่างน้อย 3 ข้อ จากข้อ 7 ถึงข้อ 12 จำนวนวิธีทั้งหมดที่นักเรียนจะสามารถเลือกทำข้อสอบเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 ข้อละ 3 คะแนน

1. นักเรียนชั้นมัธยมปีที่ 4 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมี 400 คน ในจำนวนนี้ มีผู้ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 225 คน และลงทะเบียนเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 240 คน ถ้ามีนักเรียนที่ไม่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และไม่ลงทะเบียนเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 50 คน แล้วจำนวนนักเรียนที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์และไม่ลงทะเบียนเรียนวิชาภาษาอังกฤษเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

   1. 110 คน 2. 115 คน 3. 120 คน 4. 125 คน

2. ถ้า $A = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $r = \left\{(x,y) \in A \times A \,|\, y = x^2 + 1\right\}$ และ $s = \left\{(x,y) \in A \times A \mid |y| = x\right\}$ แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $R_s - D_r$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

3. ถ้า $f(x) = \sqrt{1-x}$ และ $g(x) = \sqrt{32 - x^2}$ แล้ว จำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $R_f \cap D_g$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 4 2. 5 3. 6 4. 7

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ ถ้าเซตคำตอบของอสมการ $|ax + b| < 9$ คือช่วงเปิด $\left(\frac{-10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 3 2. 4 3. 5 4. 6

5. เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ ในข้อใด ที่ทำให้ข้อความ $\forall x\left[8(4^x) \geq 16^x\right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   1. $\mathcal{U} = [-20,0)$ 2. $\mathcal{U} = [-15,5)$ 3. $\mathcal{U} = [-10,10)$ 4. $\mathcal{U} = [-5,15)$

6. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. ถ้าประพจน์ $\left[A \to (X \wedge Y)\right] \to X$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วประพจน์ $(A \vee Y) \to X$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   ข. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือช่วง $(-1,0)$ แล้วข้อความ $\forall x\left[-x^2 > x\right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
   3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

7. ถ้า S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\tan x + 2\sin x = 0$ โดยที่ $0 \leq x \leq 2\pi$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกในเซต S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 3π 2. 4π 3. 5π 4. 6π

8. ถ้า x เป็นจำนวนจริงในช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2\sin 2x - \cot 2x - \operatorname{cosec} 2x = 0$ แล้ว $\sin^2 4x + \cos^2 x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{4}{3}$ 4. $\frac{3}{2}$

9. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และมุม $A\hat{C}B$ เท่ากับ $\frac{\pi}{6}$ ถ้า D เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่ง $AD{:}AC$=3:4 และมุม $A\hat{D}C$ เท่ากับ θ แล้ว $\cos^2\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{5}{9}$

10. กำหนดให้วงรี $4x^2 + 9y^2 = 36$ มีจุด (s,t) เป็นจุดโฟกัสซึ่ง $s < 0$ ถ้าวงกลม $x^2 + kx + y^2 + my = 4$ มีจุด (s,t) เป็นจุดศูนย์กลาง แล้วรัศมีของวงกลมวงนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 หน่วย 2. 3 หน่วย 3. $2\sqrt{5}$ หน่วย 4. $3\sqrt{5}$ หน่วย

11. ถ้า $kx^2 - ly^2 - 12 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด $(5,0)$ และ $(-5,0)$ เป็นโฟกัส และความยาวของแกนตามขวางเท่ากับ 6 หน่วย แล้ว $3k + 4l$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10

12. ถ้า x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $2\left(3^{4x}\right) - \left(3^{2x}\right)\left(2^{2x}\right) - 3\left(2^{4x}\right) = 0$ แล้ว $\log_2(2x+7)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 3 3. 4 4. 5

13. ให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\left(\log_2 x\right)^2 \le \log_2(x^2)$ ถ้า a และ b เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุด และสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ S ตามลำดับแล้ว $2b - a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8

14. ถ้า A เป็น 2×2 เมตริกซ์ ซึ่ง $2\det(A) + 3\det(3(A^{-1})^t) - 55 = 0$ และ $\det(A)$ เป็นจำนวนเต็ม แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\det(A) \le 10$ 2. $10 < \det(A) \le 20$
3. $20 < \det(A) \le 30$ 4. $\det(A) > 30$

15. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^x \\ 2^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

แล้ว $y^2 - 2x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8

16. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} \dfrac{16-x^2}{x-4}, & x > 4 \\ kx^2 + x - 2, & x \le 4 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 4$ แล้ว $\left(f' \circ f'\right)(5)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.50 2. 1.75 3. 2.00 4. 2.25

17. ถ้า $f(x) = \dfrac{x^2+1}{ax-1}$ และ $f'(0) = -2$ แล้ว $\left(f + f'\right)(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

18. กำหนดให้ $f(x) = \displaystyle\int \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) dx$ และ $g(x) = xf(x)$ ถ้า $f(1) = -2$

แล้ว $g'(3)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 25 3. 30 4. 35

19. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 13$ ถ้า $f(1) = -3$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ แล้วค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32 2. 33 3. 36 4. 37

20. ในการจัดคน 7 คน ซึ่งมีวิชิตและกนกรวมอยู่ด้วย เพื่อนั่งโต๊ะกลมสองตัว โต๊ะตัวแรกมี 4 ที่นั่ง และโต๊ะตัวที่สองมี 3 ที่นั่ง วีธีจัดทั้งหมดที่ให้วิชิตและกนกนั่งโต๊ะตัวเดียวกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 60 วิธี 2. 120 วิธี 3. 150 วิธี 4. 180 วิธี

21. ปิตินัดพบปะสังสรรค์กับเพื่อนในกลุ่มเพื่อนสนิทของเขา 6 คน ความน่าจะเป็นที่เพื่อนอย่างน้อย 3 คนจะตอบรับการนัดของปิติ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{21}{32}$ 2. $\dfrac{41}{64}$ 3. $\dfrac{11}{32}$ 4. $\dfrac{31}{64}$

22. กำหนดให้ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 และ x_6 คือ $3, 4, 6, 13, 8$ และ 2 ตามลำดับ
พิจารณาข้อความต่อไปนี้
ก. $\sum_{i=1}^{6}(x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = 6$
ข. $\sum_{i=1}^{6}|x_i - b|$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $b = 5$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก
1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

23. กำหนดให้อัตราส่วนระหว่างจำนวนนักเรียนชายต่อจำนวนนักเรียนหญิงของนักเรียนห้องหนึ่งเท่ากับ $3:2$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องนี้ทั้งห้องเท่ากับ 43 คะแนน และ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนชายมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนหญิงเท่ากับ 5 คะแนนแล้ว อัตราส่วนระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนชายต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนหญิง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $6:5$
2. $7:6$
3. $8:7$
4. $9:8$

24. กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ เป็นข้อมูลที่เรียงลำดับจากน้อยไปมาก โดยที่ $\sum_{i=1}^{10} x_i = x_3 + 165$ และเปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 เท่ากับ 13.5 ถ้า $x_1 = 8$ และ $x_2 = 12$
แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 18.1
2. 18.0
3. 17.9
4. 17.8

25. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 20 คน เป็นดังนี้ กิติสอบได้ 35 คะแนน และค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบทั้งหมดเท่ากับ 60 คะแนน ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนนของนักเรียน 19 คนที่ไม่นับรวมกิติเท่ากับ 2.5 แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 4
2. 6
3. 8
4. 10

สรุปเนื้อหา
วิชาคณิตศาสตร์
(A-Net)

รศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี
ผศ.ดร.ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เซต

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต

1. การเขียนเซต

1.1 แบบแจกแจงสมาชิก เช่น $\{1,3,5,7,9\}$

1.2 แบบบอกเงื่อนไข เช่น $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10 $\}$

เขียน $x \in A$ แทน "x เป็นสมาชิกของเซต A"

และเขียน $x \notin A$ แทน "x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A"

2. เซตจำกัดและเซตอนันต์

2.1 **เซตจำกัด** คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น $\{-3,1,0,2\}$ เขียนแทนจำนวนสมาชิกของ A ด้วย $n(A)$ เช่น $n\big(\{-3,1,0,2\}\big)=4$

2.2 **เซตอนันต์** คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น $\{1,2,3,\ldots\}$

3. เซตว่างและเอกภพสัมพัทธ์

3.1 **เซตว่าง** คือเซตที่ไม่สมาชิกเลย เขียนแทนด้วย ϕ หรือ $\{\ \}$

3.2 **เอกภพสัมพัทธ์** คือเซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้น มักเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ด้วย U

2. ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

1. สับเซต

A เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และเขียนแทนด้วย $A \subset B$

2. การเท่ากันของเซต

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ 1. สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และ

2. สมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

นั่นคือ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

ข้อสังเกต สำหรับเซต A ใด ๆ

1. $\phi \subset A$
2. $A \subset A$
3. $A \subset U$
4. เรียกสับเซตของ A ที่ไม่เท่ากับ A ว่า **สับเซตแท้**ของ A
5. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $n(A) = m$ แล้ว A จะมีสับเซตแตกต่างกันทั้งหมด 2^m สับเซต

3. เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ นิยามโดย $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1,2,3\}$ จงหา $P(A)$

วิธีทำ $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ข้อสังเกต สำหรับเซต A ใด ๆ

1. $P(A)$ คือเซตที่ประกอบด้วยสับเซตทั้งหมดของ A
2. ถ้า A เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
3. $\phi \in P(A)$ และ $A \in P(A)$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
5. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
6. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

4. การดำเนินการของเซต

1. **อินเตอร์เซกชัน** $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
2. **ยูเนียน** $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
3. **คอมพลีเมนท์** $A' = \{x \mid x \notin A\}$
4. **ผลต่าง** $A - B = \{x \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

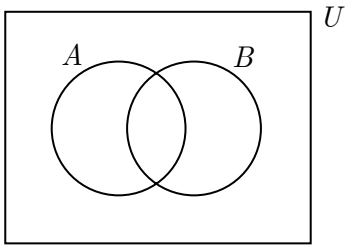
ข้อสังเกต สำหรับเซต A, B และ C ใด ๆ

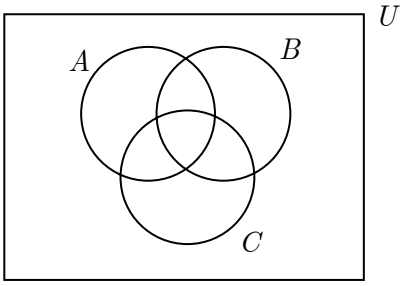
1.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.	$A \cup B = B \bigcup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
6.	$(A')' = A$	
7.	$\phi' = U$	$U' = \phi$
8.	$A \cup \phi = A$ $A - \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$ $\phi - A = \phi$
9.	$U \cup A = U$ $U - A = A'$	$U \cap A = A$ $A - U = \phi$
10.	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \phi$
11.	$A - B = A \cap B'$	
12.	ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$	

5. สูตรเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

สำหรับเซตจำกัด A, B, C ใด ๆ

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$





ตรรกศาสตร์

1. ประพจน์

ประพจน์ คือประโยคที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธก็ได้

2. นิเสธและตัวเชื่อมประพจน์

เราสร้างประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับเดิมได้โดยอาศัยตัวดำเนินการที่เรียกว่า**นิเสธ** ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim$ ซึ่งสามารถแสดงค่าความจริงด้วยตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T

นอกจากนี้ประพจน์สองประพจน์สามารถเชื่อมกันได้ด้วยตัวเชื่อมประพจน์ต่าง ๆ กัน 4 แบบคือ

1. ตัวเชื่อม **และ** เขียนแทนด้วย $\wedge$
2. ตัวเชื่อม **หรือ** เขียนแทนด้วย $\vee$
3. ตัวเชื่อม **ถ้า...แล้ว** เขียนแทนด้วย $\rightarrow$
4. ตัวเชื่อม **ก็ต่อเมื่อ** เขียนแทนด้วย $\leftrightarrow$

ซึ่งสามารถแสดงค่าความจริงสำหรับประพจน์ที่มีตัวเชื่อมต่าง ๆ ได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

หลักในการจำค่าความจริงสำหรับตัวเชื่อมต่าง ๆ

1. ตัวเชื่อม และ เป็น T เมื่อทั้งคู่เป็น T นอกนั้นเป็น F
2. ตัวเชื่อม หรือ เป็น F เมื่อทั้งคู่เป็น F นอกนั้นเป็น T
3. ตัวเชื่อม ถ้า...แล้ว เป็น F สำหรับ T $\rightarrow$ F เพียงกรณีเดียวเท่านั้น ที่เหลือเป็น T
4. ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ ถ้าเหมือนกันเป็น T และถ้าต่างกันเป็น F

3. ตารางค่าความจริง

การสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์เป็นการแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดทุกกรณี ซึ่งทำได้ไม่ยาก แต่เสียเวลา หากมีประพจน์ย่อยต่าง ๆ กันอยู่ n ประพจน์ย่อย จะมีกรณีที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด 2^n กรณี

ตัวอย่าง จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \to q) \wedge r$

วิธีทำ

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

4. ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ใด ๆ สองประพจน์สมมูลกัน เมื่อไม่ว่าค่าความจริงในประพจน์ย่อยจะเป็นอย่างไร ค่าความจริงของทั้งสองประพจน์นั้นจะเหมือนกันทุกกรณี การตรวจสอบการสมมูลสามารถทำได้โดยสร้างตารางค่าความจริงหรืออาศัยประพจน์สมมูลพื้นฐานเข้าช่วย

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ที่สมมูลกัน จะเขียนแทนด้วย $p \equiv q$

เพื่อให้ตรวจสอบประพจน์ที่สมมูลกันได้ง่าย เราอาจอาศัยรูปแบบที่สมมูลกันต่อไปนี้เข้าช่วย

1. การสลับที่

$$p \vee q \equiv q \vee q$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

2. การจัดหมู่

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

3. การกระจาย

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

4. เอกลักษณ์

$$\begin{aligned} p \vee p &\equiv p \\ p \wedge p &\equiv p \\ p \wedge \mathrm{T} &\equiv p \\ p \vee \mathrm{F} &\equiv p \end{aligned}$$

5. ถ้า...แล้ว

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

6. นิเสธซ้อน

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

7. นิเสธ

$$\begin{aligned} \sim(p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

8. ก็ต่อเมื่อ

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

5. สัจนิรันดร์

เราจะเรียกประพจน์ใดว่า **สัจนิรันดร์** ก็ต่อเมื่อไม่ว่าค่าความจริงของประพจน์ย่อยจะเป็นอะไรก็ตาม ค่าความจริงของประพจน์นั้นจะเป็นจริงเสมอ

6. ประโยคเปิดและวลีบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปร ประโยคเปิดไม่เป็นประพจน์ แต่ถ้าแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วเราจะได้ประพจน์

การทำประพจน์เปิดให้เป็นประพจน์สามารถทำได้โดยการใส่ วลีบ่งปริมาณ ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 2 ตัว คือ "$\forall$" (for all, ทุก ๆ) และ "$\exists$" (for some, บางตัว) ซึ่งการกำหนดค่าความจริงและการใส่นิเสธเป็นไปตามตารางต่อไปนี้

ข้อความ	เงื่อนไขที่ทำให้จริง	เงื่อนไขที่ทำให้เท็จ
$\forall x[P(x)]$	ทุก ๆ x ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x)$ จริง	มีบาง x ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x)$ เท็จ
$\exists x[P(x)]$	มีบาง x ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x)$ จริง	ทุก ๆ x ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x)$ เท็จ

ในบางครั้งประโยคเปิดของเราอาจมีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวก็ได้ เช่น ให้ $P(x,y)$ เป็นประโยคเปิดที่แทนข้อความว่า “$x+y=5$” หรือ $Q(x,y,z)$ แทนข้อความ “$x+y+z=1$” เป็นต้น

การกำหนดค่าความจริงและการใส่นิเสธของประโยคเปิดสองตัวแปรเป็นดังนี้

ข้อความ	เงื่อนไขที่ทำให้จริง	เงื่อนไขที่ทำให้เท็จ
$\forall x \forall y\,[P(x,y)]$	ทุก x ทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x,y)$ จริง	มีบาง x และมีบาง y ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ
$\forall x \exists y\,[P(x,y)]$	ทุก x ในเอกภพสัมพัทธ์ จะหา y ที่ทำให้ $P(x,y)$ จริงได้	มีบาง x ที่ทำให้ทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ
$\exists x \forall y\,[P(x,y)]$	มีบาง x ซึ่งทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ	ทุก x ในเอกภพสัมพัทธ์ จะหา y ที่ทำให้ $P(x,y)$ เท็จได้
$\exists x \exists y\,[P(x,y)]$	มีบาง x และมีบาง y ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x,y)$ จริง	ทุก x และทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ

7. นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ

1. $\sim \forall x\,[P(x)] \equiv \exists x\,[\sim P(x)]$
2. $\sim \exists x\,[P(x)] \equiv \forall x\,[\sim P(x)]$
3. $\sim \forall x \forall y\,[P(x,y)] \equiv \exists x \exists y\,[\sim P(x,y)]$
4. $\sim \forall x \exists y\,[P(x,y)] \equiv \exists x \forall y\,[\sim P(x,y)]$
5. $\sim \exists x \forall y\,[P(x,y)] \equiv \forall x \exists y\,[\sim P(x,y)]$
6. $\sim \exists x \exists y\,[P(x,y)] \equiv \forall x \forall y\,[\sim P(x,y)]$

8. การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลคือการอ้างว่าเมื่อมีข้อความ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ชุดหนึ่งเป็นจริง จะสามารถสรุปข้อความ q ได้หรือไม่ นั่นคือข้อความ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่นั่นเอง

ถ้าข้อความ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ เราจะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนี้**สมเหตุสมผล** (valid) ถ้าไม่เป็นสัจนิรันดร์จะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนี้**ไม่สมเหตุสมผล** (invalid)

จำนวนจริง

1. ผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวน

- จำนวนจริง ($\mathbb{R}$)
  - จำนวนอตรรกยะ ($\mathbb{Q}'$)
  - จำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$)
    - จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม (I')
    - จำนวนเต็ม (I)
      - จำนวนเต็มลบ (I^-)
      - จำนวนเต็มศูนย์ ($\{0\}$)
      - จำนวนเต็มบวก (I^+) หรือจำนวนนับ ($\mathbb{N}$)

2. รากของสมการพหุนาม

1. รากตรรกยะของสมการพหุนาม

สมการพหุนาม $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ และ $a_n \neq 0$ จะมีรากตรรกยะที่อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ $\dfrac{p}{q}$ เมื่อ p หาร a_0 ลงตัวและ q หาร a_n ลงตัว

2. ทฤษฎีบทเศษเหลือ

กำหนด $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ และ $a_n \neq 0$ เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - c$ จะได้เศษเท่ากับ $p(c)$

3. สมบัติของอสมการ

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
6. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $0 < ac < bd$
7. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

4. ค่าสัมบูรณ์และสมบัติของค่าสัมบูรณ์

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

1. $\sqrt{a^2} = |a|$
2. $|a| \geq 0$
3. $|a| = |-a|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
6. $|a|^2 = a^2$
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$
8. ถ้า $a > 0$ แล้ว

   8.1 $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

   8.2 $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

   8.3 $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

   8.4 $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

5. การแก้อสมการที่แยกตัวประกอบได้

1. ถ้าจะคูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยค่าคงตัวหรือนิพจน์ จะต้องตรวจสอบว่าค่าคงตัวหรือนิพจน์นั้นมีค่าเป็นบวกหรือลบอย่างใดอย่างหนึ่งและอาจต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการให้เหมาะสม

2. พยายามจัดให้ข้างหนึ่งของอสมการเป็น 0 แล้วจึงแยกตัวประกอบ

3. เนื่องจากจำนวนจริงที่ยกกำลังด้วยเลขคี่จะมีเครื่องหมายคงเดิม และจำนวนจริงที่ยกกำลังคู่จะมีค่าเป็นศูนย์หรือบวกเท่านั้น จึงสามารถพิจารณาอสมการที่แยกตัวประกอบแล้วบางวงเล็บมีเลขยกกำลังได้ดังนี้

   3.1 ถ้าวงเล็บใดยกกำลังด้วยเลขคี่ ให้แก้อสมการเสมือนหนึ่งว่าวงเล็บนั้นยกกำลังหนึ่ง

   3.2 ถ้าวงเล็บใดยกกำลังด้วยเลขคู่ ให้ตัดวงเล็บนั้นออกไปจากการพิจารณาก่อน แต่เมื่อได้คำตอบแล้ว จะต้องพิจารณาอีกครั้งว่าวงเล็บที่ตัดออกไปก่อนนั้นมีผลต่อเซตคำตอบหรือไม่ แล้วจึงปรับคำตอบให้ถูกต้อง

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

1. การหารลงตัวและจำนวนเฉพาะ

1. m หาร n ลงตัวก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $mc = n$ ให้เขียนแทนด้วย $m \mid n$

2. จำนวนเต็มบวก $p \geq 2$ เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อจำนวนเต็มบวกที่หาร p ลงตัวอยู่ในเซต $\{1, p\}$

3. จำนวนเต็ม $n > 1$ จะแยกตัวประกอบ $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น เมื่อไม่คำถึงนึงลำดับในการเขียน

2. ทฤษฎีบทที่สำคัญสำหรับจำนวนเต็ม

1. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

2. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a \mid b$ แล้ว $a \leq b$

3. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid bx + cy$ สำหรับจำนวนเต็ม x และ y ใด ๆ

4. ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \mid mn$ แล้ว $p \mid m$ หรือ $p \mid n$

3. ตัวหารร่วมมาก(ห.ร.ม.) และตัวคูณร่วมน้อย(ค.ร.น.)

1. จำนวนเต็มบวก g จะเห็น**ตัวหารร่วมมาก(ห.ร.ม.)** ของจำนวนเต็ม m กับ n ซึ่ง $m^2 + n^2 \neq 0$ เมื่อ

   (1) g เป็นตัวหารร่วมของ m กับ n นั่นคือ $g \mid m$ และ $g \mid n$

   (2) ในบรรดาตัวหารร่วมทั้งหมดของ m และ n ตัวหารร่วมที่มีค่ามากที่สุดคือ g

   ห.ร.ม. ของ m และ n เขียนแทนด้วย (m, n)

2. จำนวนเต็มบวก c จะเป็น**ตัวคูณร่วมน้อย(ค.ร.น.)** ของจำนวนเต็ม m กับ n ซึ่ง $m^2 + n^2 \neq 0$ เมื่อ

   (1) c เป็นตัวคูณร่วมของ m กับ n นั่นคือ $m \mid c$ และ $n \mid c$

   (2) ในบรรดาตัวคูณร่วมบวกทั้งหมดของ m และ n ตัวคูณร่วมที่มีค่าน้อยที่สุดคือ c

   ค.ร.น. ของ m และ n เขียนแทนด้วย $[m, n]$

3. ถ้า m และ n มี ห.ร.ม. เท่ากับ 1 แล้วจะกล่าวว่า m และ n เป็น**จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์**กัน

4. มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $(m, n) = mx + ny$

5. $(m, n) = 1$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $mx + ny = 1$

6. ถ้า $g = (m, n)$ แล้ว $(\frac{m}{g}, \frac{n}{g}) = 1$

7. ผลคูณของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของจำนวนเต็มสองจำนวนมีค่าเท่ากับผลคูณของจำนวนทั้งสอง

$$(m, n)[m, n] = mn$$

เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์

1. นิยาม

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{แถวที่ } 1 \\ \longleftarrow \text{แถวที่ } 2 \\ \\ \longleftarrow \text{แถวที่ } m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{หลักที่ } 1 & \text{หลักที่ } 2 & & \text{หลักที่ } n \end{array} \end{array}$$

1.1 เมทริกซ์เป็นกลุ่มของจำนวนหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เขียนเรียงกันในลักษณะของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

1.2 เมทริกซ์ A ข้างต้น ประกอบด้วยแถว m แถว และหลัก n หลัก จึงกล่าวว่าเมทริกซ์ A **มีมิติ** $m \times n$

1.3 ใช้สัญลักษณ์ a_{ij} แทนสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A

1.4 เขียน $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แทน "A เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิก a_{ij} และมีมิติ $m \times n$"

2. เมทริกซ์พิเศษที่สำคัญ

2.1 **เมทริกซ์ศูนย์** คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์

2.2 **เมทริกซ์จัตุรัส** คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ เราจะนิยาม **เส้นทแยงมุมหลัก**ของเมทริกซ์ A เป็นแนวของสมาชิก $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ กล่าวคือเป็นแนวมุมซ้ายบนไปมุมขวาล่าง ดังรูป

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.3 **เมทริกซ์เอกลักษณ์** คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 และสมาชิกที่เหลือเป็นศูนย์ เขียน $I_{n\times n}$ แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. การดำเนินการและความสัมพันธ์ของเมทริกซ์

1. การเท่ากันของเมทริกซ์

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์มีมิติเดียวกันและสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

2. การบวกและการลบเมทริกซ์

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $A - B = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{m\times n}$

3. การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ k เป็นสเกลาร์ (จำนวนหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์) แล้ว $kA = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$

4. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times p}$ แล้วจะได้ $AB = \left[c_{ij}\right]_{m\times p}$ โดยที่

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

กล่าวง่าย ๆ คือ c_{ij} **เป็นผลคูณระหว่างแถวที่ i ของเมทริกซ์ A กับหลักที่ j ของเมทริกซ์ B**

โดยทั่วไปแล้ว $AB \neq BA$ นั่นคือ ไม่มีสมบัติการสลับที่สำหรับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

5. ทรานสโพส

ทรานสโพสเป็นการสลับเปลี่ยนระหว่างแถวกับหลักของเมทริกซ์

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้วทรานสโพสของ A เขียนแทนด้วย A^t โดยที่ $A^t = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ และ $b_{ij} = a_{ji}$

3. สมบัติที่สำคัญบางประการของการดำเนินการของเมทริกซ์

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ใด ๆ และ $[0]$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์มิติ $m \times n$

1. $A + B = B + A$ (การสลับที่สำหรับการบวก)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก)
3. $A + [0] = [0] + A = A$ (เอกลักษณ์การบวก)
4. $A + (-A) = (-A) + A = [0]$ เมื่อ $-A = (-1)A$ (อินเวอร์สการบวก)

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ที่ผลคูณ AB มีความหมาย

5. $(AB)C = A(BC)$ (การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)
6. $A(B + C) = AB + AC$ และ $(B + C)A = BA + CA$ (การกระจาย)
7. $AI = IA = A$ เมื่อ A และ I เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน (เอกลักษณ์การคูณเมทริกซ์จัตุรัส)

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ที่การดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย

8. $(A^t)^t = A$
9. $(A + B)^t = A^t + B^t$ และ $(A - B)^t = A^t - B^t$
10. $(kA)^t = kA^t$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์
11. $(AB)^t = B^tA^t$

4. ดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ เขียน $\det(A)$ หรือ $|A|$ แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A โดย

1. ถ้า $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ แล้ว $\det(A) = a_{11}$
2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 แล้ว $\det(A)$ หาได้จาก $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 แล้ว $\det(A)$ หาได้โดยวิธีต่อสองหลักแรก

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

5. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n\times n$ และมีเมทริกซ์ B มิติ $n\times n$ ซึ่ง $AB = BA = I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n\times n$ แล้วจะเรียก B ว่าอินเวอร์สการคูณของ A และเขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

1. ถ้า A ไม่มีอินเวอร์สการคูณ แล้วจะเรียก A ว่าเป็น**เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix)
   ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ แล้วจะเรียก A ว่าเป็น**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน** (nonsingular matrix)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์และ $k \neq 0$
5. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

6. สมบัติที่สำคัญบางประการของดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$ และจะได้ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
4. ถ้า A มีมิติ $n\times n$ และ k เป็นสเกลาร์แล้ว $\det(kA) = k^n \det(A)$
5. $\det(I) = 1$
6. $\det(A^n) = \big(\det(A)\big)^n$ เมื่อ A^n คือผลคูณของเมทริกซ์ A ทั้งหมด n ตัว

7. ไมเนอร์ โคแฟกเตอร์ และเมทริกซ์ผูกพัน

กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ

7.1 ไมเนอร์ (Minor)

ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij} ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$ ซึ่งเท่ากับดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ทิ้งไป เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad M_{21}(A) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$$

7.2 โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

โคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{ij} ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$ นิยามโดย

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

ข้อสังเกต $(-1)^{i+j}$ เท่ากับ 1 เมื่อ ij เป็นเลขคู่ และเท่ากับ -1 เมื่อ $i+j$ เป็นเลขคี่

7.3 เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

เมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ A เขียนแทน $\operatorname{adj}(A)$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนที่สมาชิกทุกตัวด้วยโคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้นแล้วทรานสโพส กล่าวคือ $\operatorname{adj}(A) = \left[C_{ij}(A)\right]^t$

7.4 สมบัติที่สำคัญบางประการของโคแฟกเตอร์และเมทริกซ์ผูกพัน

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ ที่มีมิติ $n \times n$

1. $\det(A)$ หาได้จากการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad \text{(กระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ } i\text{)}$$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad \text{(กระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ } j\text{)}$$

2. $A\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \operatorname{adj}(A)A = \det(A)I$

3. ถ้า $\det(A) \neq 0$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}}$$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = ad - bc \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

4. $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^{n-1}$

8. ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้น m สมการ n ตัวแปร $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AX = B$$

ถ้า $m = n$ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานแล้ว

1. หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้จาก $X = A^{-1}B$

2. กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการนำ B แทนลงในหลักที่ i ในเมทริกซ์ A

3. การดำเนินการตามแถว

1. สลับสองแถวใด ๆ (R_{ij})
2. คูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ (kR_i)
3. บวกแถวใดแถวหนึ่งด้วยพหุคุณของอีกแถวหนึ่ง ($R_i + kR_j$)

ให้ทำการดำเนินการตามแถวจนได้เมทริกซ์ลดรูปขั้นบันได

9. การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์โดยการดำเนินการตามแถว

ให้ใช้การดำเนินการตามแถวกระทำกับ $\left[A \mid I\right]$ จนได้ $\left[I \mid A^{-1}\right]$

$$\left[A \mid I\right] \xrightarrow{\text{ดำเนินการตามแถว}} \left[I \mid A^{-1}\right]$$

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) ของ A และ B คือ

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ข้อสังเกต โดยทั่วไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$ แต่ $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A)\,n(B)$

2. ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์จาก A ไป B คือ สับเซตของ $A \times B$

ข้อสังเกต

1. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดแล้วจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B คือ $2^{n(A)n(B)}$

2. ϕ เป็นความสัมพันธ์เสมอ

3. โดเมนและเรนจ์

1. โดเมน (Domain)

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ $D_r = \{x \in A \mid \text{ มี } y \in B \text{ ที่ทำให้ } (x,y) \in r\}$

2. เรนจ์ (Range)

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ $R_r = \{y \in B \mid \text{ มี } x \in A \text{ ที่ทำให้ } (x,y) \in r\}$

ข้อสังเกต

1. เราอาจมองอย่างง่าย ๆ ได้ว่า D_r ก็คือเซตของสมาชิกตำแหน่งแรกของ r และ R_r ก็คือเซตของสมาชิกตำแหน่งหลังของ r

2. ในการหา D_r นั้น เราจะเขียนสมการในรูป $y = f(x)$ แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

3. ในการหา R_r นั้น เราจะเขียนสมการในรูป $x = g(y)$ แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

4. อินเวอร์สของความสัมพันธ์

ให้ r เป็นความสัมพันธ์ จะได้อินเวอร์สของ r คือ

$$r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\} = \{(x,y) \mid (y,x) \in r\}$$

ข้อสังเกต $D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

5. ฟังก์ชัน

1. ความหมายของฟังก์ชัน

เรียกความสัมพันธ์ r ว่าเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ทุกคู่ลำดับในความสัมพันธ์นั้นไม่มีสมาชิกตำแหน่งแรกซ้ำกัน และเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ($f : A \to B$) ก็ต่อเมื่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

2. ฟังก์ชันทั่วถึง

เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B และเขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$ ก็ต่อเมื่อ $f : A \to B$ และ $R_f = B$

3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง(1-1) และเขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ข้อสังเกต ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้วอินเวอร์สของ f เป็นฟังก์ชันด้วย

6. ฟังก์ชันคอมโพสิท

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $R_f \cap D_g \neq \phi$ ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g นิยามโดย

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } f(x) \in D_g$$

7. พีชคณิตของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $D_f \cap D_g \neq \phi$ นิยาม

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$
3. $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

8. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

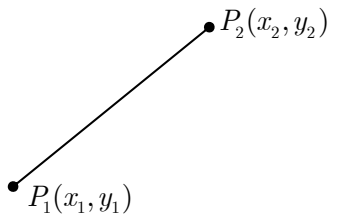
1. ถ้า $f(a) < f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันเพิ่ม**
2. ถ้า $f(a) > f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันลด**
3. ถ้า $f(a) \leq f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันไม่ลด**
4. ถ้า $f(a) \geq f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันไม่เพิ่ม**

เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

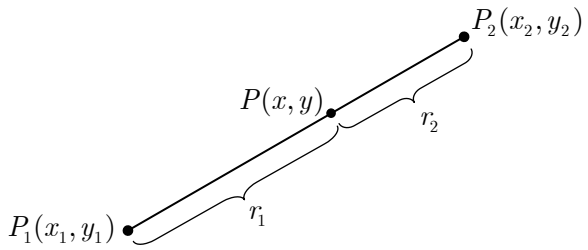
1. เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

1. ระยะทางระหว่างจุด

กำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ จะได้ $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



2. การแบ่งส่วนของเส้นตรง

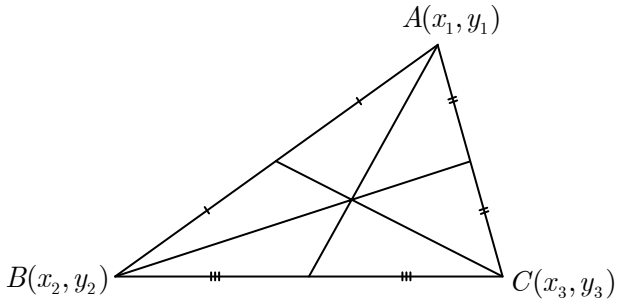


พิกัดของจุด P ซึ่งทำให้ $|P_1P| : |P_2P| = r_1 : r_2$ คือ $(\frac{r_2x_1 + r_1x_2}{r_1 + r_2}, \frac{r_2y_1 + r_1y_2}{r_1 + r_2})$

ในกรณีที่จุด P แบ่งครึ่ง P_1P_2 จะได้พิกัดของจุด P คือ $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

3. จุดมัธยฐานของสามเหลี่ยม

กำหนดสามเหลี่ยม ABC ดังรูป พิกัดของจุดมัธยฐานคือ $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$



2. เส้นตรง

1. ความชันของเส้นตรง

นิยามความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{เมื่อ} \quad x_1 \neq x_2$$

1.1 ถ้าเส้นตรง L ทำมุม θ กับแกน x แล้ว $m = \tan\theta$

1.2 กำหนดให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชันเป็น m_1 และ m_2 ตามลำดับ

จะได้ $L_1 // L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

และ $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

2. สมการเส้นตรง

2.1 เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m มีสมการเป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$

2.2 เส้นตรงที่ตัดแกน y ที่จุด $(0, c)$ และมีความชัน m มีสมการเป็น $y = mx + c$

2.3 สมการทั่วไปของเส้นตรงคือ $Ax + By + C = 0$ ซึ่งมีความชันเป็น $m = -\dfrac{A}{B}$

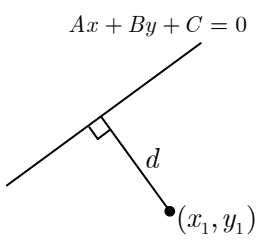
3. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และเส้นตรงกับเส้นตรง

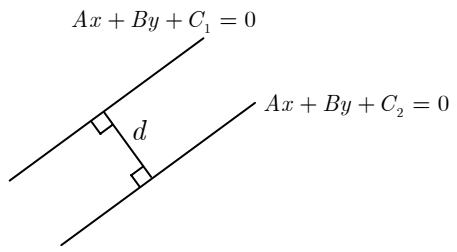
3.1 ระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) กับเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3.2 ระยะทางระหว่างเส้นขนาน $Ax + By + C_1 = 0$ กับ $Ax + By + C_2 = 0$ คือ

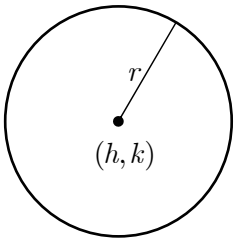
$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$





3. วงกลม (Circle)

วงกลม คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง(จุดศูนย์กลาง)เป็นระยะทางคงที่(รัศมี) เสมอ



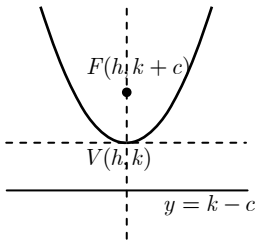
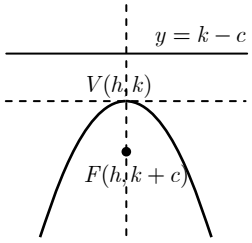
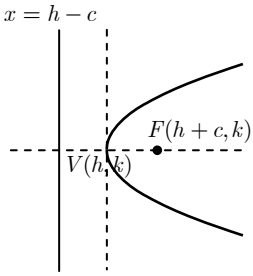
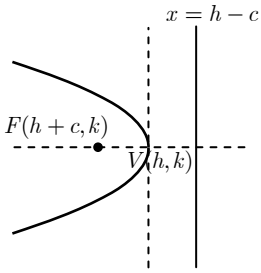
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

4. พาราโบลา (Parabola)

พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง(ไดเรกทริกซ์)และจุดคงที่(โฟกัส) จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

เรียกจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัส(จุด F) กับไดเรกทริกซ์ว่า **จุดยอด** (จุด V)

	$c>0$	$c<0$
$(x-h)^2=4c(y-k)$		
$(y-k)^2=4c(x-h)$		

ข้อสังเกต ความกว้างของพาราโบลาที่จุดโฟกัสเท่ากับ $|4c|$

5. วงรี (Ellipse)

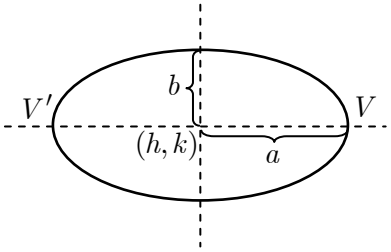
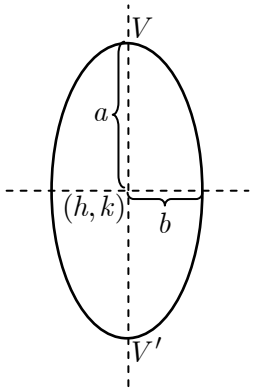
วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด (จุดโฟกัส) บนระนาบมีค่าคงที่

ถ้าให้ผลบวกคงที่นั้นเท่ากับ $2a$ และให้จุดโฟกัสห่างกัน $2c$ โดยที่ $a > c$

และกำหนด b โดย

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

จะได้สมการวงรีใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b > 0$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b > 0$
	

เรียกจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองว่า **จุดศูนย์กลาง** ซึ่งก็คือจุด (h,k) ในรูป

เรียกแกนที่ยาวว่า **แกนเอก**

เรียกแกนที่สั้นว่า **แกนโท**

เรียกจุดปลายทั้งสองของแกนเอกว่า **จุดยอด** ซึ่งก็คือจุด V และ V'

ความหมายของพารามิเตอร์ a, b, c มีดังนี้

ค่า a จะบอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดทั้งสอง (จุดปลายแกนเอก) จึงอาจเรียก a ว่า **ระยะครึ่งแกนเอก**

ค่า b จะบอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดปลายทั้งสองของแกนโท จึงอาจเรียก b ว่า**ระยะครึ่งแกนโท**

ค่า c จะบอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัสทั้งสอง โดยจุดโฟกัสจะอยู่บนแกนเอกเสมอ

6. ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

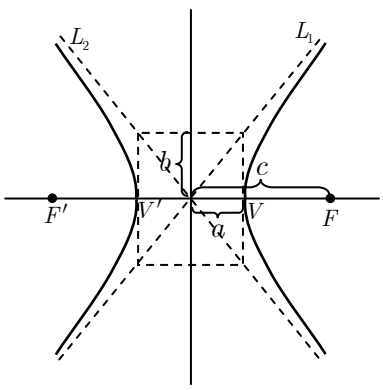
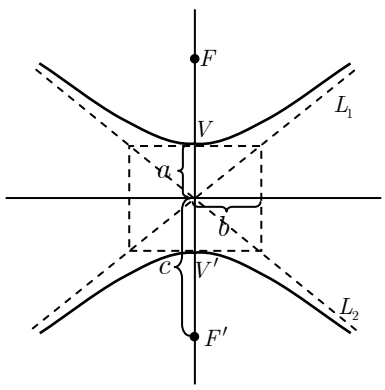
ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆในเซตนี้ไปยังจุดคงที่ (จุดโฟกัส) สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว

ถ้าให้ผลต่างคงที่นั้นเท่ากับ $2a$ และให้จุดโฟกัสห่างกัน $2c$ โดยที่ $a < c$

และกำหนด b โดย

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลาใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
	

จุด V และ V' เรียกว่า **จุดยอด**

ส่วนของเส้นตรง VV' เรียกว่า **แกนตามขวาง**

ส่วนของเส้นตรง AA' เรียกว่า **แกนสังยุค**

เส้นตรง L_1 และ L_2 เรียกว่า **เส้นกำกับไฮเพอร์โบลา**

ความหมายของพารามิเตอร์ a, b, c มีดังนี้

ค่า a จะบอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดทั้งสอง(จุดปลายแกนตามขวาง)

ค่า b จะบอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดปลายทั้งสองของแกนสังยุค

ค่า c จะบอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัสทั้งสอง โดยจุดโฟกัสจะอยู่บนแกนตามขวางเสมอ

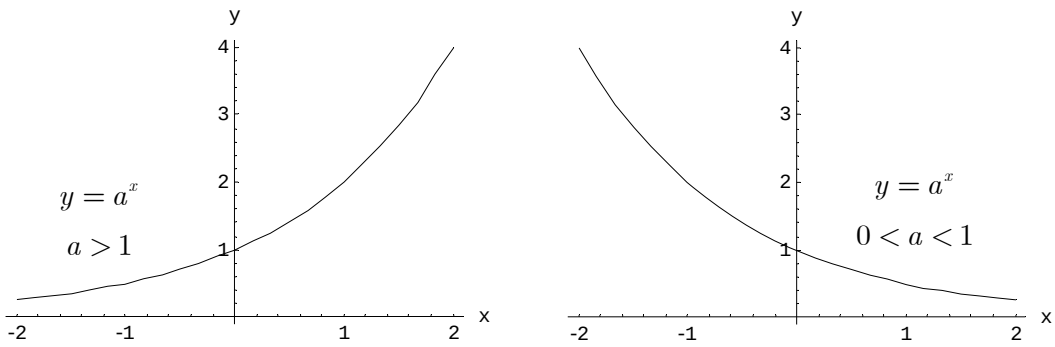
ถ้า $a = b$ แล้วจะเรียกไฮเพอร์โบลานั้นว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**

นอกจากนี้ยังมีไฮเพอร์มุมฉากในรูปพิเศษซึ่งมีสมการเป็น $xy = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่และ $k \neq 0$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$



ข้อสังเกต

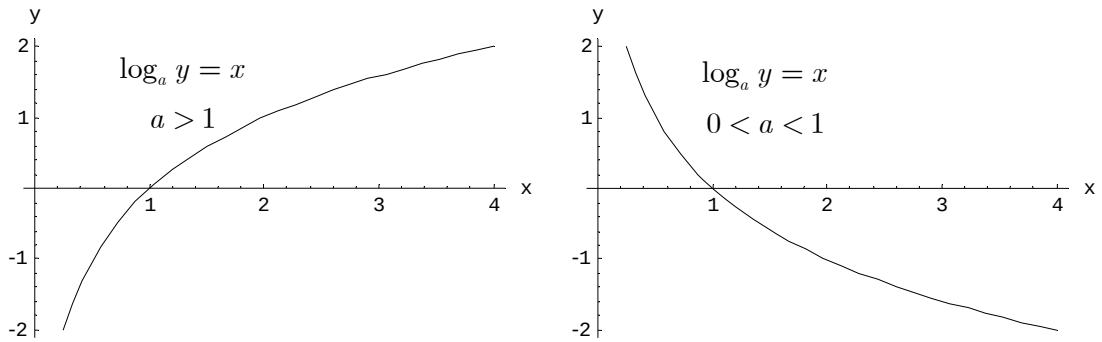
1. กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ
2. $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}^+$ นั่นคือ $D_{\exp} = \mathbb{R}$ และ $R_{\exp} = \mathbb{R}^+$
3. $a^x > 0$ เสมอ (เมื่อ $a > 0$)
4. ถ้า $a > 1$ แล้ว a^x จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 < x_2$
5. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว a^x จะเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 > x_2$

2. ฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

กำหนดฐาน a สอดคล้องกับ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$

$y = a^x$ ก็ต่อเมื่อ $\log_a y = x$



ข้อสังเกต

1. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึมผ่านจุด $(1,0)$ เสมอ

2. $\log : \mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}$ นั่นคือ $D_{\exp} = \mathbb{R}^+$ และ $R_{\exp} = \mathbb{R}$

3. ถ้า $a > 1$ แล้ว $\log_a x$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 < x_2$

4. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\log_a x$ จะเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 > x_2$

3. สมบัติที่สำคัญบางประการของฟังก์ชันลอการิทึม

1. $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$

2. $\log_a a^x = x$

3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5. $\log_a x^y = y \log_a x$

6. $\log_{a^p} x^y = \dfrac{y}{p} \log_a x$

7. $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

8. $\log_y x = \dfrac{1}{\log_x y}$

9. $a^{\log_a x} = x$

4. ลอการิทึมฐานธรรมชาติ

e เป็นค่าคงตัวและเป็นอตรรกยะ โดย $e = 2.7182818\ldots$

ลอการิทึมฐาน e นิยมเขียนแทนด้วย $\ln x$ นั่นคือ $\ln x = \log_e x$

5. การหา $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$

เนื่องจาก $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = (x+y) + 2\sqrt{xy}$

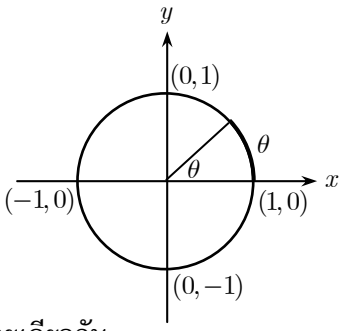
การหา $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ จึงทำได้โดยหา x และ y ซึ่ง $x + y = a$ และ $xy = b$ และจะได้

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{และ} \quad \sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad \text{เมื่อ } x > y$$

ตัวอย่าง $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ และ $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

ตรีโกณมิติ

1. วงกลมหนึ่งหน่วยและการวัดมุม



วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลม $x^2 + y^2 = 1$

กำหนดให้มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย มีค่าเท่ากับ θ เรเดียน โดยให้มุมบวกเป็นมุมที่วัดในทิศทวนเข็มนาฬิกาเทียบกับแกน x ด้านบวกและให้มุมลบเป็นมุมที่วัดในทิศทวนเข็มนาฬิกาเทียบกับแกน x ด้านลบ

1. มุม θ และมุม $\theta + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะมีจุดปลายเดียวกัน
2. ส่วนโค้งที่ยาว a ในวงกลมรัศมี r จะรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ $\theta = \dfrac{a}{r}$
3. π เรเดียน $= 180^\circ$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ถ้าจุดปลายของมุม θ มีพิกัดเป็น (x, y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยแล้วจะนิยาม

$\cos\theta = x$	$\sin\theta = y$
$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$
$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{y}$ เมื่อ $y \neq 0$	$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x}{y}$ เมื่อ $y \neq 0$

3. เอกลักษณ์พื้นฐาน

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(n\pi - \theta) = (-1)^{n+1}\sin\theta$	$\cos(n\pi - \theta) = (-1)^n\cos\theta$	
$\sin(\frac{2n+1}{2}\pi - \theta) = (-1)^n\cos\theta$	$\cos(\frac{2n+1}{2}\pi - \theta) = (-1)^n\sin\theta$	

4. สูตรมุมประกอบ

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$	$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$	$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$	$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

5. สูตรมุมสองเท่า

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	
$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

6. สูตรมุมสามเท่า

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$	

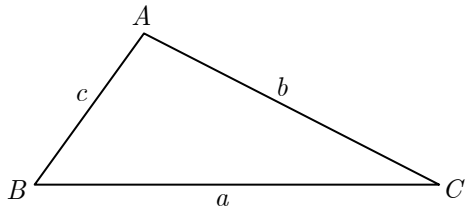
7. สูตรมุมครึ่งเท่า

$\sin^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2}$	$\cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{2}$
$\tan \dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$	

8. สูตรแปลงระหว่างผลคูณกับผลบวกหรือผลต่าง

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$	$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

9. สูตรเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม



1. กฎของไซน์ (Law of Sine)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

เมื่อ R เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม

2. กฎของโคไซน์ (Law of Cosine)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

เมื่อกำหนดความยาวด้าน a, b, c สามารถใช้กฎของโคไซน์หา $\cos A, \cos B, \cos C$ ได้

3. พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

10. รูปทั่วไปของมุมจากการแก้สมการตรีโกณมิติ

1. ถ้า $\sin\theta = \sin\alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + (-1)^{n\alpha}$ หรือเขียนว่า $\theta = 2n\pi + \alpha, (2n+1)\pi - \alpha$
2. ถ้า $\cos\theta = \cos\alpha$ แล้ว $\theta = 2n\pi \pm \alpha$
3. ถ้า $\tan\theta = \tan\alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + \alpha$

11. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ถ้า $y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = x$ และ $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. ถ้า $y = \arccos x$ ก็ต่อเมื่อ $\cos y = x$ และ $x \in [0, \pi]$
3. ถ้า $y = \arctan x$ ก็ต่อเมื่อ $\tan y = x$ และ $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
arcsin	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1,1]$	$[0, \pi]$
arctan	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ข้อสังเกต

1. $\sin(\arcsin x) = x$ เสมอ แต่ $\arcsin(\sin x)$ อาจไม่เท่ากับ x ต้องพิจารณาช่วงของ x ด้วย
2. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ และ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \arccos(-x) = \pi - \arccos x$ และ $\arctan(-x) = -\arctan x$
4. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์

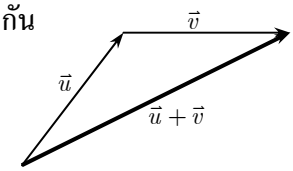
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์

สเกลาร์เป็นปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว

เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรที่ปลายหนึ่งเพื่อระบุทิศทางของเวกเตอร์และความยาวของส่วนของเส้นตรงนั้นระบุขนาดของเวกเตอร์

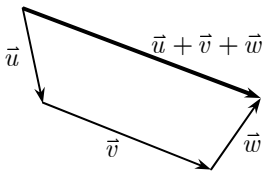
ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $|\vec{u}|$

จะกล่าวว่า $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกันและมีขนาดเท่ากัน



เวกเตอร์ศูนย์ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 0 เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

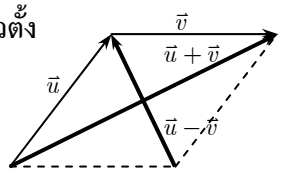
2. การบวกและการลบเวกเตอร์



1. การบวกเวกเตอร์

ทำได้โดยการเขียนเวกเตอร์ต่อกันในลักษณะหางต่อหัว

2. การลบเวกเตอร์



ทำได้โดยการกลับทิศของเวกเตอร์ตัวลบก่อนจึงบวกเข้ากับเวกเตอร์ตัวตั้ง

ข้อสังเกต

1. $-\vec{v}$ เป็นนิเสธของ $\vec{v}$ กล่าวคือมีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$ แต่มีทิศตรงข้าม

2. $\vec{u}+\vec{v}$ และ $\vec{u}-\vec{v}$ เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นด้าน

3. เนื่องจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อด้านแต่ละด้านยาวเท่ากัน จึงได้ว่า $\vec{u}+\vec{v} \perp \vec{u}-\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ k เป็นสเกลาร์ และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ นิยาม $k\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น $|k|$ เท่าของ $\vec{u}$ และ

1. มีทิศเดียวกับ $\vec{u}$ ถ้า $k > 0$

2. มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ถ้า $k < 0$

ข้อสังเกต

1. $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$

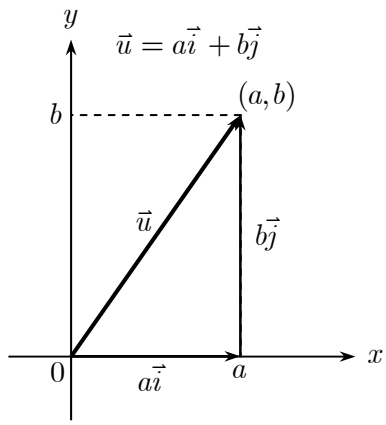
2. ถ้า $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ และมีสเกลาร์ k ซึ่ง $\vec{u} = k\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$

4. สมบัติที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับเวกเตอร์

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใด ๆ และสเกลาร์ a, b ใด ๆ

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
5. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
6. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
7. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
8. ถ้า $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ และ $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

5. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ



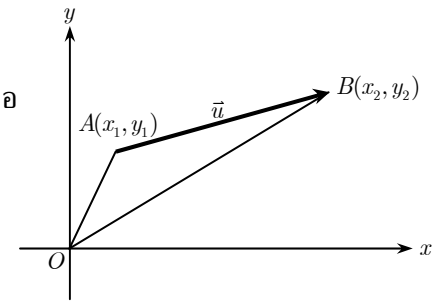
ให้ $\vec{i}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน x

และ $\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน y

เวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่เริ่มจากจุดกำเนิดไปสิ้นสุดที่จุด (a, b) คือ

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \left|a\vec{i} + b\vec{j}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$



เวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่เริ่มจากจุด $A(x_1, y_1)$ ไปสิ้นสุดที่จุด $B(x_2, y_2)$ คือ

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

6. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่กำหนดให้

กำหนด $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ โดยที่ $\vec{u} \neq \vec{0}$ ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศของ $\vec{u}$ คือ $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = -\dfrac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้

กำหนด $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ โดยที่ $\vec{u} \neq \vec{0}$ ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ คือ $\pm\dfrac{b\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

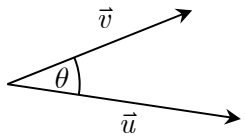
7. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product)

กำหนด $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$

นิยามผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็น $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab + cd$

ข้อสังเกต สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใด ๆ

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$



ถ้า $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ เราสามารถหามุมระหว่างเวกเตอร์ได้จาก

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

5. ถ้า $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ แล้ว $\vec{u} \perp \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
6. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |u|^2$
7. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2$

   $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2$

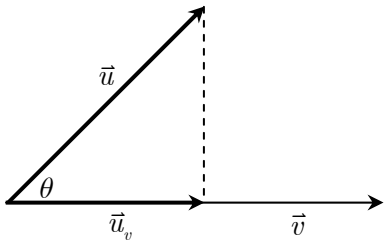
8. เงาฉาย (Projection)

ให้ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ projection ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือเงาฉายของเวกเตอร์ $\vec{u}$ บนเวกเตอร์ $\vec{v}$ ดังรูป

ให้ $\vec{u}_v$ เป็นเวกเตอร์เงาฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ จะเห็นว่า $|\vec{u}_v| = |\vec{u}|\cos\theta = |\vec{u}|\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

ดังนั้น $\vec{u}_v = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\left(\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$

ในทำนองเดียวกัน เงาฉายของ $\vec{v}$ บน $\vec{u}$ คือ $\vec{v}_u = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$



9. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ในทำนองเดียวกับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะกำหนดให้ $\vec{i}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน x, $\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน y และ $\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน z จะเห็นว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่เริ่มจากจุดกำเนิดไปสิ้นสุดที่จุด (a,b,c) จะเขียนได้ในรูป

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

10. ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนด $\vec{u}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ และ $\vec{u}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ จะนิยาม

1. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product หรือ Dot Product)

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = |\vec{u}_1||\vec{u}_2|\cos\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}_1$ กับ $\vec{u}_2$

2. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product หรือ Cross Product)

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} + (c_1a_2 - c_2a_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

หาทิศของ $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ ได้จากกฎมือขวาและ $|\vec{u}_1\times\vec{u}_2| = |\vec{u}_1||\vec{u}_2|\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}_1$ กับ $\vec{u}_2$ นอกจากนี้ $|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|$ ยังเป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}_1$ กับ $\vec{u}_2$ เป็นด้านประชิด

11. ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

รูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน(parallelepiped) ที่มีเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นด้านประชิดคือ

$$V = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

จำนวนเชิงซ้อน

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

1. จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนที่เขียนในรูป $a+bi$
โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i^2=-1$
เรียก a ว่า**ส่วนจริง**(real part) และเรียก b ว่า**ส่วนจินตภาพ**(imaginary part)
ถ้าให้ $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะกำหนด $\mathrm{Re}(z)=a$ และ $\mathrm{Im}(z)=b$

2. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเขียน $|z|$ แทนขนาดของ z โดย $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

3. สังยุค(conjugate)ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเขียน $\overline{z}$ แทนสังยุคของ z โดย $\overline{z}=a-bi$

2. การดำเนินการและความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนด $z_1=a_1+b_1i$ และ $z_2=a_2+b_2i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

$z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=b_1$ และ $a_2=b_2$

2. การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$

3. การคูณจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$$

แต่ $i^2=-1$ จึงได้ $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

ข้อสังเกต

1. $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, i^6=-i, \ldots$
2. $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=i^2=-1, i^{4n+3}=i^3=-i$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
3. ถ้า $z=a+bi$ แล้ว $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=|z|^2$

4. การหารจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z_2 \neq 0$ แล้ว $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$

นั่นคือ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \dfrac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \dfrac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$

ข้อสังเกต $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$

3. สมบัติที่สำคัญบางประการ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, z_1, z_2 ใด ๆ

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ และ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ และ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
4. $z\overline{z} = |z|^2$
5. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ และ $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
6. $|-z| = |z|$
7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ และ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
8. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $z \neq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มลบ
9. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
10. $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = |z_1^2| + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2^2|$

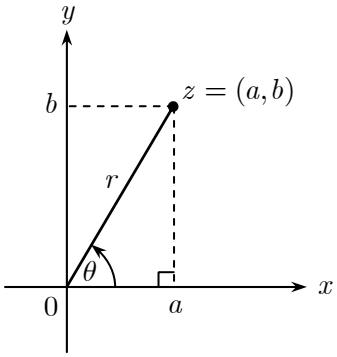
    $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = |z_1^2| - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2^2|$

ตัวอย่าง กำหนด $z_1 = 4 - 3i$ และ $z_2 = 1 + i$ จงหา $\left|\dfrac{\overline{z}_1^6 i^{17}}{625\overline{z}_2^5}\right|$

วิธีทำ จะเห็นว่า $|z_1| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ และ $|z_2| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

นอกจากนี้ $|i| = 1$ ดังนั้น $\left|\dfrac{\overline{z}_1^6 i^{17}}{625\overline{z}_2^5}\right| = \dfrac{|\overline{z}_1^6||i^{17}|}{|625||\overline{z}_2^5|} = \dfrac{|\overline{z}_1|^6 |i|^{17}}{625|\overline{z}_2|^5} = \dfrac{|z_1|^6 |i|^{17}}{625|z_2|^5} = \dfrac{5^6 \cdot 1^{17}}{625(\sqrt{2})^5} = \dfrac{25}{4\sqrt{2}}$

4. จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ แทนได้ด้วยจุด (a, b) ในระบบพิกัดฉาก

เรียกแกน x ว่าแกนจริง และเรียกแกน y ว่าแกนจินตภาพ

เรียก r ว่า**มอดุลัส**(modulus) และเรียก θ ว่า**อาร์กิวเมนท์**(argument) ของ z

จะเห็นว่า $z = a + bi = r\cos\theta + r\sin\theta\, i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

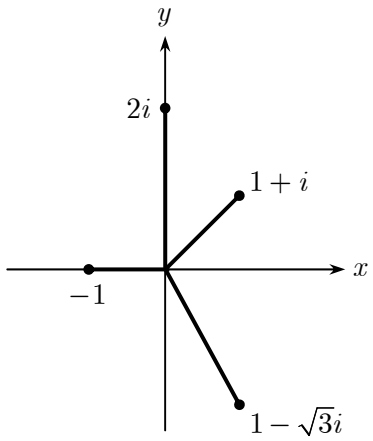
เรียกจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เมื่อ $r \geq 0$ ว่า**รูปเชิงขั้ว**

ข้อสังเกต

1. $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$ และ $|r(\cos\theta + i\sin\theta)| = r$
2. $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

ตัวอย่าง

1. $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$
2. $1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
3. $2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $-1 = 1\big(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\big)$



ข้อสังเกต

1. รูปเชิงขั้วของ z มีได้มากมาย เช่น $i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathrm{I}$
2. การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วทำให้การคูณ หาร และยกกำลังทำได้ง่ายขึ้นมาก

5. การคูณ การหาร และการยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ และ $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

ให้ $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

6. การหารากที่ *n* ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{เมื่อ } k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

ข้อสังเกต รากทั้ง n ตัวมีขนาดเท่ากันหมด และมีอาร์กิวเมนต์ห่าง $\frac{2\pi}{n}$ เท่า ๆ กัน

ตัวอย่าง จงหารากที่ 4 ของ $16i$

วิธีทำ เนื่องจาก $16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ดังนั้นรากที่เห็นได้ง่ายที่สุดคือ $2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

ส่วนรากที่เหลืออีก 3 ตัว หาได้โดยการเพิ่มอาร์กิวเมนต์ของรากตัวแรกไปครั้งละ $\frac{2\pi}{4}$

ซึ่งจะได้รากที่เหลือเป็น $2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right), 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right), 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$

7. รากของสมการพหุนาม

พิจารณาสมการพหุนาม $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ เมื่อ $a_n \neq 0$

1. สมการนี้มีราก n ราก (นับรากที่ซ้ำกันด้วย)

2. ในกรณีที่ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง และถ้า z_1 เป็นรากแล้ว $\overline{z_1}$ จะเป็นรากด้วย

3. ถ้า $z_1, z_2, \ldots, z_n$ เป็นรากทั้ง n ตัว (อาจซ้ำกันได้) แล้ว

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{และ} \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

ในกรณีของสมการกำลังสอง $az^2 + bz + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

และ z_1, z_2 เป็นรากทั้งสองแล้วจะได้ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ และ $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

กำหนดการเชิงเส้น

1. ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming Problem)

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ภายใต้ข้อจำกัดที่กำหนดให้

ข้อจำกัดมักจะอยู่ในรูปของระบบอสมการเชิงเส้น

2. ขั้นตอนการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

1. หาฟังก์ชันจุดประสงค์และข้อจำกัดทั้งหมดของปัญหา

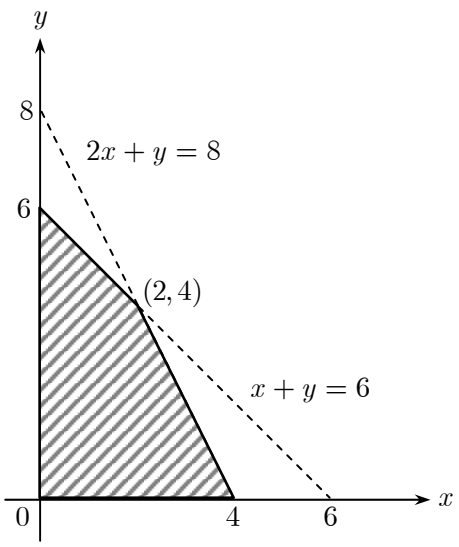
2. เขียน**อาณาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้** (feasible region) และหาพิกัดของจุดมุมทุกจุด

3. หาค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุดมุมทุกจุด แล้วเลือกจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดตามต้องการ

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $P = 5x + 4y$ ภายใต้ข้อจำกัด

$$2x + y \leq 8,\ x + y \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

วิธีทำ เขียนบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้



ได้จุดมุม 4 จุดคือ $(0,0), (0,6), (2,4), (4,0)$ ซึ่งแทนในฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ดังนี้

$$P(0,0) = 0,\ P(0,6) = 24,\ P(2,4) = 26,\ P(4,0) = 20$$

ดังนั้น P มีค่าสูงสุดเท่ากับ 26 เมื่อ $x = 2, y = 4$ และ P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 เมื่อ $x = 0, y = 0$

การนับและความน่าจะเป็น

1. กฎการนับเบื้องต้น

1. กฎการคูณ

การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งเป็น k ขั้นตอนย่อย ที่ทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ วิธี ตามลำดับ

จะมีจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้นทั้งหมด $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$ วิธี

2. กฎการบวก

การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งเป็น k กรณีย่อยที่ไม่ซ้ำกัน ที่ทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ วิธี ตามลำดับ

จะมีจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้นทั้งหมด $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

2. แฟกทอเรียล (Factorial)

$0! = 1$ และ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ เมื่อ $n \geq 1$

ข้อสังเกต $n(n+1)(n+2)\cdots(n+m) = \dfrac{(n+m)!}{n!}$

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง

1. ของ n สิ่งที่ต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ $n!$ วิธี

2. ของ n สิ่งที่ต่างกัน นำมาทีละ k สิ่งมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ ${}^{n}P_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ วิธี

3. การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำเป็นเส้นตรง

   ถ้าของ n สิ่งแบ่งได้ k กลุ่มดังนี้ ที่มีของเหมือนกัน $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับ

   แล้วจะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$ วิธี

ข้อสังเกต ${}^{n}P_n = \dfrac{n!}{0!} = n!$ และ ${}^{n}P_0 = \dfrac{n!}{n!} = 1$

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม

สิ่งของ n สิ่งที่ต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ $(n-1)!$ วิธี

ถ้าจัดเป็นวงกลมที่มองได้สองด้าน เช่น การร้อยมาลัย จะทำได้ $\dfrac{(n-1)!}{2}$ วิธี

4. วิธีจัดหมู่

มีของ n สิ่งที่ต่างกัน เลือกมาทีละ k สิ่งโดยไม่สนใจลำดับ จำนวนวิธีที่ทำได้คือ

$$^{n}C_{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ข้อสังเกต

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$

4. $^{n}P_{k} = \binom{n}{k}k!$

5. การแบ่งกลุ่มของที่ต่างกัน

มีของ n สิ่งที่ต่างกัน ต้องการแบ่งเป็น k กลุ่มต่างกัน ที่มี $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับ

จะแบ่งกลุ่มได้ $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$ วิธี

6. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

ข้อสังเกต

1. ในการจาย $(a+b)^n$ จะได้ $n+1$ พจน์

2. พจน์ที่ $k+1$ คือ $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

3. สัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินามจัดเป็นสามเหลี่ยมของปาสคาลได้

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

4. เอกลักษณ์ของปาสคาล $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

5. ถ้าแทน $a = b = 1$ จะได้ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

6. ถ้าแทน $a = 1, b = -1$ จะได้ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

7. ความน่าจะเป็น

1. การทดลองสุ่ม คือการทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกผลการทดลองในแต่ละครั้งได้อย่างถูกต้องแน่นอน
2. แซมเปิลสเปซ (sample space) คือเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม
3. เหตุการณ์ (event) คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ

ถ้า S เป็นเซมเปิลสเปซซึ่งประกอบด้วย**สมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน** แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

ข้อสังเกต

1. $0 \leq P(E) \leq 1$ สำหรับเหตุการณ์ E ใด ๆ
2. $P(\phi) = 0$ และ $P(S) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   ในกรณีที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จะได้ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกันแล้ว $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
   เหตุการณ์จะเป็นอิสระต่อกัน เมื่อการเกิดของเหตุการณ์หนึ่งไม่มีผลกระทบถึงอีกการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง
5. ถ้า A' เป็นคอมพลีเมนต์ของ A จะได้ $P(A') = 1 - P(A)$

8. ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อมีเงื่อนไขว่าเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า**ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข** เขียนแทนด้วย $P(A \mid B)$ และ

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ข้อสังเกต

1. $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)$
2. ถ้า A และ B อิสระต่อกันแล้ว

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ และ } P(B \mid A) = P(B)$$

ซึ่งจะได้ตามมาว่า $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ลำดับและอนุกรม

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม

1. ลำดับ

ลำดับเป็นชุดของตัวเลขที่เขียนเรียงต่อกันอย่างมีลำดับ ซึ่งอาจมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัดหรืออาจมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ก็ได้

ลำดับจำกัดที่มี n พจน์จะอยู่ในรูป $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

ลำดับอนันต์จะอยู่ในรูป $a_1, a_2, a_3, \ldots$

2. อนุกรม

ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับหนึ่ง

ลำดับของผลบวกย่อย n พจน์แรกของลำดับ a_n คือ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

อนุกรมอนันต์ของลำดับอนันต์ a_n คือ $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ เมื่อผลบวกมีค่า

ข้อสังเกต $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$

3. ลำดับเลขคณิตและอนุกรมเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือลำดับซึ่ง $a_{n+1} - a_n$ เป็นค่าคงตัว สำหรับทุกจำนวนนับ n

เรียก $d = a_{n+1} - a_n$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **ผลต่างร่วม**

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตคือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

ตัวอย่าง ให้ $-3, 1, 5, 9, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต จงหาพจน์ที่ n และผลบวก n พจน์แรก

วิธีทำ ผลต่างร่วม $d = 1 - (-3) = 4$ ดังนั้น $a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)(4) = 4n - 7$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)4] = n(2n-5)$

4. ลำดับเรขาคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือลำดับซึ่ง $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เป็นค่าคงตัว สำหรับทุกจำนวนนับ n

เรียก $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **อัตราส่วนร่วม**

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตคือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ในกรณีที่ $|r| < 1$ จะหาผลบวกอนันต์ได้เป็น $S = \frac{a}{1-r}$

2. ลิมิตของลำดับ

1. ความหมายของลิมิต

ถ้า a_n มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว A ในขณะที่ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต

จะกล่าวว่าลิมิตของ a_n เมื่อ $n \to \infty$ เท่ากับ A และเขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

ตัวอย่าง

1. $a_n = \frac{n}{n+1}$ ซึ่งก็คือ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ 1 ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
2. $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ซึ่งก็คือ $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

2. ลำดับคอนเวอร์เจนต์และลำดับไดเวอร์เจนต์

ให้ a_n เป็นลำดับ

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่า จะเรียก a_n ว่าเป็น**ลำดับคอนเวอร์เจนต์** (convergent sequence)

มิฉะนั้นจะเรียก a_n ว่าเป็น**ลำดับไดเวอร์เจนต์** (divergent sequence)

ตัวอย่าง

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ มีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ $n \to \infty$ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ จึงเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์
2. $a_n = (-1)^n$ ซึ่งก็คือ $-1, 1, -1, 1, \ldots$ ซึ่งไม่ได้เข้าใกล้ค่าใด จึงไม่มีลิมิต และเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ข้อสังเกต ถ้าลิมิตมีค่า แล้วลิมิตจะต้องเป็นค่าคงตัวและมีค่าเดียวเท่านั้น

3. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ แล้ว

1. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ และ $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$ และ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ เมื่อ $B \neq 0$
4. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |A|$
5. $\lim_{n\to\infty} a_n^c = A^c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
6. $\lim_{n\to\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
7. $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } |r| < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } r = 1 \end{cases}$ และ $\lim_{n\to\infty} r^n$ ไม่มี เมื่อ $r = -1$ หรือ $|r| > 1$
8. $\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } p < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0 \end{cases}$ และ $\lim_{n\to\infty} n^p$ ไม่มี เมื่อ $p > 0$
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & \text{เมื่อ } p = q \\ 0 & \text{เมื่อ } p < q \end{cases}$ และไม่มีลิมิตเมื่อ $p > q$

4. อนุกรมคอนเวอร์เจนต์และอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ให้ S_n เป็นลำดับของผลบวกย่อย n พจน์แรกของลำดับ a_n

ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ มีค่า จะเรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ว่า **อนุกรมคอนเวอร์เจนต์**

มิฉะนั้นจะเรียกว่า **อนุกรมไดเวอร์เจนต์**

ข้อสังเกต

1. อนุกรมเลขคณิตเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์เสมอ ยกเว้นเมื่อ $a_1 = d = 0$ ซึ่งคือลำดับ $0, 0, \ldots$
2. อนุกรมเรขาคณิตจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์เมื่อ $|r| < 1$

   และเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์เมื่อ $|r| \geq 1$ ทั้งนี้เมื่อ $a_1 \neq 0$

3. ความสัมพันธ์ระหว่างการลู่เข้าและลู่ออกของลำดับและอนุกรม

กรณีที่สรุปได้แน่นอนมีสองกรณี คือ

3.1 ถ้าอนุกรมคอนเวอร์เจนต์แล้ว ลำดับต้องคอนเวอร์เจนต์เข้าสู่ 0 เสมอ
นั่นคือ ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ มีค่า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

3.2 ถ้าลำดับไดเวอร์เจนต์แล้ว อนุกรมต้องไดเวอร์เจนต์เสมอ

กรณีที่สรุปผลไม่ได้มีสองกรณี คือ

3.3 ถ้าอนุกรมไดเวอร์เจนต์แล้ว ลำดับอาจจะคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ก็ได้

3.4 ถ้าลำดับคอนเวอร์เจนต์แล้ว อนุกรมอาจจะคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ก็ได้

3. เครื่องหมายรวมยอด (Summation)

ให้ a_n เป็นลำดับ กำหนด $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

1. สมบัติบางประการของเครื่องหมายรวมยอด

1. $\sum_{i=1}^{n} (ca_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. ผลรวมที่ควรทราบ

1. $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

แคลคูลัส

1. ลิมิตและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

1. ลิมิตสองด้าน

เขียน $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ แทน " $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ a"

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ มีค่าแล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)+g(x)\big] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)-g(x)\big] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)g(x)\big] = \Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)\Big(\lim\limits_{x\to a} g(x)\Big)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. ถ้า $f(x)$ เป็น**ฟังก์ชันพหุนาม**แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ เมื่อการหารากมีความหมาย

2. ลิมิตด้านเดียว

เขียน $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ แทน " $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ a **จากทางซ้าย**"

เขียน $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ แทน " $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ a **จากทางขวา**"

ทฤษฎีบทสำหรับลิมิตสองด้านยังคงใช้ได้กับลิมิตด้านเดียว

ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

2. ความต่อเนื่อง

ฟังก์ชัน f จะมีความต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ มีค่า และ
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

3. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

กำหนด $y = f(x)$

ถ้า x เปลี่ยนไปเป็น $x + h$ แล้วการเปลี่ยนแปลงของ x คือ $\Delta x = (x + h) - x = h$

และการเปลี่ยนแปลงของ y คือ $\Delta y = f(x + h) - f(x)$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4. อนุพันธ์

กำหนด $y = f(x)$ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x เขียนแทนด้วย $\frac{dy}{dx}, y', f'(x), \frac{df(x)}{dx}$ โดยที่

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

เราอาศัยสูตรต่อไปนี้ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x

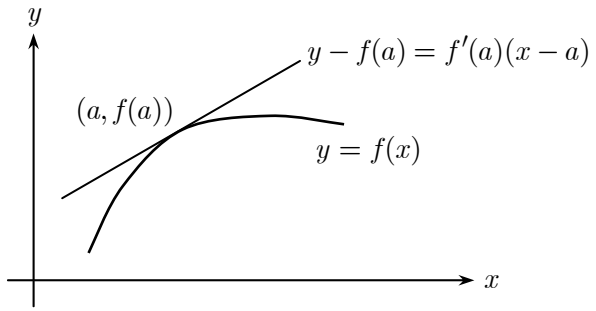
4. $\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
6. **สูตรผลคูณ** $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. **สูตรผลหาร** $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

ถ้า z เป็นฟังก์ชันของ y และ y เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว

8. **กฎลูกโซ่** $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

5. ความชันและเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

กำหนดเส้นโค้ง $y = f(x)$ ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดใดก็คืออนุพันธ์ที่จุดนั้น



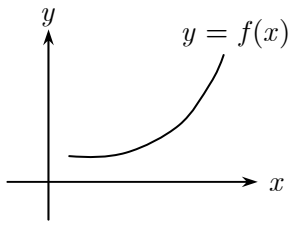
6. อนุพันธ์อันดับสูง

กำหนด $y = f(x)$ เราเรียก $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ว่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

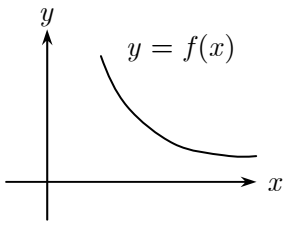
เรียก $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสอง

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

7. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด



ฟังก์ชันเพิ่ม



ฟังก์ชันลด

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[a, b]$

สำหรับทุก $x_1, x_2 \in [a, b]$

1. ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ ทุก $x_1 < x_2$ แล้วจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บนช่วง $[a, b]$

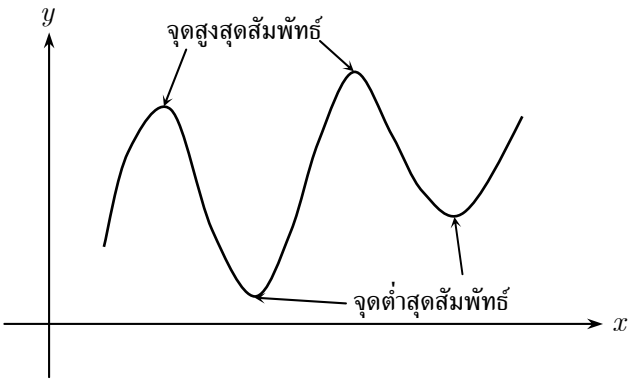
2. ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ ทุก $x_1 < x_2$ แล้วจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันลด**บนช่วง $[a, b]$

ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้ที่ทุกจุดในช่วง (a, b) แล้วจะตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดได้ดังนี้

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a,b]$

2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a,b]$

8. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



เมื่อกำหนด $y = f(x)$ หาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

1. หาอนุพันธ์ $f'(x)$

2. แก้สมการ $f'(x) = 0$ คำตอบที่ได้เรียกว่า**จุดวิกฤต** (จุดที่หา $f'(x)$ ไม่ได้เป็นจุดวิกฤตด้วย)

3. จุดวิกฤตแต่ละจุดอาจเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือไม่ใช่ทั้งสองอย่าง ซึ่งสามารถทดสอบจุดวิกฤต $x = x_0$ ได้ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้

   3.1 **วิธีอนุพันธ์อันดับสอง**

   - ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว x_0 จะให้จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

   - ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว x_0 จะให้จุดสูงสุดสัมพัทธ์

   - ถ้า $f''(x_0) = 0$ แล้วยังสรุปไม่ได้ ต้องทดสอบโดยวิธีอื่น

   3.2 **วิธีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

   พิจารณาการเปลี่ยนเครื่องหมายของ $f'(x)$ ที่จุด x_0 ขณะ x มีค่าเพิ่มขึ้นจากทางซ้ายของ x_0 ไปทางขวาของ x_0

   - ถ้า $f'(x)$ มีค่าเปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ แสดงว่าเปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่มไปเป็นฟังก์ชันลด จึงให้จุดสูงสุดสัมพัทธ์

   - ถ้า $f'(x)$ มีค่าเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก แสดงว่าเปลี่ยนจากฟังก์ชันลดไปเป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงให้จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

- ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย แสดงว่าไม่ใช้จุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

9. ปฏิยานุพันธ์และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ แล้วจะเรียก $F(x)$ ว่าปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และเขียนแทนด้วย $F(x) = \int f(x)\,dx$

ข้อสังเกต ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว $F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

เราอาศัยสูตรต่อไปนี้ช่วยในการหาปฏิยานุพันธ์

1. $\int dx = x + c$ และ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ เมื่อ $n \neq -1$
2. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว
3. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

10. อินทิกรัลจำกัดเขตและพื้นที่ใต้กราฟ

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้วนิยาม $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx$ จะมีความหมายเป็นพื้นที่ใต้กราฟของ $y = f(x)$ ในช่วง $x = a$ ถึง $x = b$

ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้ว $\int_a^b |f(x)|\,dx$ จะมีความหมายเป็นพื้นที่ระหว่างกราฟ $y = f(x)$ กับแกน x ในช่วง $x = a$ ถึง $x = b$

สถิติ

1. การวัดค่ากลางของข้อมูล

ลำดับ	ค่ากลาง	สูตร	ข้อสังเกต
1.	**ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** (arithmetic mean) หรือ $\overline{x}$	$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	1. $\sum_{i=1}^{N} x_i = N\overline{x}$ 2. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = 0$ 3. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2$ น้อยที่สุดเมื่อ $a = \overline{x}$ 4. ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\overline{y} = a\overline{x} + b$ 5. $x_{\min} \le \overline{x} \le x_{\max}$
2.	**มัธยฐาน** (median) หรือ Me	Me = ค่าของข้อมูลตำแหน่งตรงกลางเมื่อเรียงลำดับข้อมูลแล้ว	$a = Me$ ทำให้ $\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i - a\rvert$ น้อยที่สุด
3.	**ฐานนิยม** (mode) หรือ Mo	Mo = ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด	1. ในกรณีที่มีข้อมูลมีการแจกแจงความถี่อันตรภาคชั้นของทุกชั้นต้องเท่ากัน 2. ข้อมูลคุณภาพนิยมหาค่ากลางโดยวิธีนี้
4.	**ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต** (geometric mean) หรือ G.M.	$G.M. = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}$	1. ข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ต้องทำให้ $\sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}$ มีความหมาย 2. $\log G.M. = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i$ เมื่อ $x_i > 0$
5.	**ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก** (harmonic mean) หรือ $H.M.$	$H.M. = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$	$H.M.$ = ส่วนกลับของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของส่วนกลับของข้อมูลแต่ละตัว
6.	**กึ่งกลางพิสัย** (mid range) หรือ $M.R.$	$M.R. = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$	ถ้าข้อมูลอยู่ในรูปอันตรภาคชั้นเปิดจะหาค่ากลางแบบนี้ไม่ได้

ในกรณีที่ข้อมูลมีการแจกแจงความถี่ ให้ถ่วงน้ำหนักด้วยความถี่ของข้อมูลแต่ละตัวตามความเหมาะสม ยกเว้นมัธยฐานที่ให้คำนวณตามสูตรต่อไปนี้

$$Mo = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) I$$

เมื่อ L = ขีดจำกัดล่างของชั้นที่มีความถี่สูงสุด

I = ความกว้างของชั้นที่มีความถี่สูงสุด

d_1 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าหนึ่งชั้น

d_2 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่สูงกว่าหนึ่งชั้น

ข้อสังเกต ถ้าข้อมูลทุกตัวมีค่าบวกแล้ว $\bar{x} \geq G.M. \geq H.M.$

2. หลักเกณฑ์สำคัญในการใช้ค่ากลางชนิดต่าง ๆ

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางที่ได้จากการนำทุก ๆ ค่าของข้อมูลมาเฉลี่ย แต่มัธยฐานและฐานนิยมเป็นเพียงค่ากลางที่ใช้ตำแหน่งที่ (position) ของข้อมูลบางค่าเท่านั้น

2. ถ้าในจำนวนข้อมูลทั้งหมดมีข้อมูลบางค่าที่มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลอื่น ๆ มาก จะมีผลกระทบกระเทือนต่อการหาค่ากลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต กล่าวคืออาจจะทำให้ค่ากลางที่ได้มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลที่มีอยู่ส่วนใหญ่ แต่จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการหาค่ากลางโดยใช้มัธยฐานหรือฐานนิยม

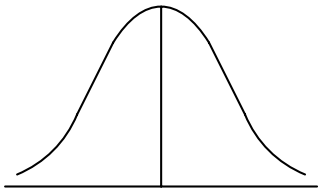
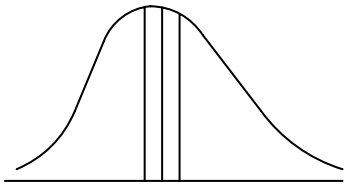
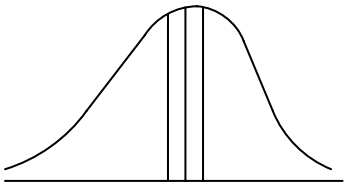
3. มัธยฐานและฐานนิยมใช้เพื่อต้องการทราบค่ากลางของข้อมูลทั้งหมดโดยประมาณและรวดเร็ว ทั้งนี้เนื่องจากการหามัธยฐานและฐานนิยมบางวิธีไม่จำเป็นต้องมีการคำนวณซึ่งอาจใช้เวลามาก

4. ถ้าการแจกแจงความถี่ของข้อมูลประกอบด้วยอันตรภาคชั้นที่มีช่วงปิด อาจเป็นชั้นต่ำสุดหรือชั้นสูงสุดคชั้นใดชั้นหนึ่งหรือทั้งสองชั้น การหาค่ากลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่สามารถหาได้ แต่สามารถหามัธยฐานหรือฐานนิยมได้

5. การแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่มีความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นไม่เท่ากัน อาจจะมีผลทำให้ค่ากลางที่หาได้โดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือฐานนิยมคลาดเคลื่อนไปจากที่ควรจะเป็นได้บ้าง แต่จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการหามัธยฐาน

6. ในกรณีที่ข้อมูลเป็นประเภทข้อมูลคุณภาพ (qualitative data) จะสามารถหาค่ากลางได้เฉพาะฐานนิยมเท่านั้น แต่ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือมัธยฐาน

7. ความสัมพันธ์ของ $\overline{x}$, Me, Mo

โค้งปกติ	โค้งเบ้ขวา	โค้งเบ้ซ้าย
		
$\overline{x} = Me = Mo$ $\overline{x}$	$Mo < Me < \overline{x}$	$\overline{x} < Me < Mo$

3. ควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์

ให้ L = ขีดจำกัดล่างของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

I = ความกว้างของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

$\sum f_L$ = เป็นความถี่สะสมก่อนชั้นที่ค่าสถิติชั้นอยู่

f_i = ความถี่ของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

ค่าสถิติ	ความหมาย	ข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่	ข้อมูลที่แจกแจงความถี่
มัธยฐาน (Median)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น2 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ Me คือ $\frac{N+1}{2}$	ตำแหน่งของ Me คือ $\frac{N}{2}$ $Med = L + I\left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_i}\right)$
ควอร์ไทล์ (Quartile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น4 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ Q_k คือ $\frac{(N+1)k}{4}$	ตำแหน่งของ Q_k คือ $\frac{kN}{4}$ $Q_k = L + I\left(\frac{\frac{kN}{4} - \sum f_L}{f_i}\right)$
เดไซล์ (Decile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น10 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ D_k คือ $\frac{(N+1)k}{10}$	ตำแหน่งของ D_k คือ $\frac{kN}{10}$ $D_k = L + I\left(\frac{\frac{kN}{10} - \sum f_L}{f_i}\right)$
เปอร์เซ็นไทล์ (Percentile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน	ตำแหน่งของ P_k คือ $\frac{(N+1)k}{100}$	ตำแหน่งของ P_k คือ $\frac{kN}{100}$ $P_k = L + I\left(\frac{\frac{kN}{100} - \sum f_L}{f_i}\right)$

4. การวัดการกระจายของข้อมูล

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์

1.1 พิสัย (Range) $= x_{\max} - x_{\min}$

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $(Q.D.) = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

1.3 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $(M.D.) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{x}|}{N}$

1.4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(s) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}}$

ความแปรปรวน (variance) $= s^2$

ข้อสังเกต

1. ถ้ามีข้อมูล m ชุด และ $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \cdots = \overline{x}_m$ แล้ว

$$s^2_{\text{รวม}} = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2 + \cdots + N_m s_m^2}{N_1 + N_2 + \cdots + N_m}$$

2. ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\overline{y} = a\overline{x} + b$ และ $s_y = |a|\, s_x$

2. การวัดการกระจายสัมพัทธ์

1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$

2. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

3. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \dfrac{M.D.}{\overline{x}}$

4. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \dfrac{s}{\overline{x}}$

5. ค่ามาตรฐานและการแจกแจกปกติ

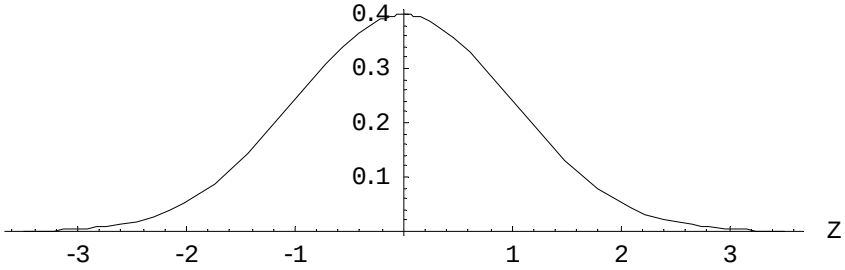
ค่ามาตรฐาน(Z-score) กำหนดโดย $Z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$

ข้อสังเกต

1. ค่าเฉลี่ยของ Z เท่ากับ 0 เสมอ

2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Z เท่ากับ 1 เสมอ

ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงปกติ แล้ว Z จะมีการกระจายดังแสดงในรูป



กราฟนี้มีสมมาตรเทียบกับ $Z = 0$ และเปิดตารางหาพื้นที่ A ระหว่าง 0 ถึง Z ได้

6. การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่เป็นเส้นตรง

สมการทั่วไปคือ $y = mx + c$

สมการปกติคือ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} y_i = m\sum_{i=1}^{N} x_i + Nc \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{N} x_i \end{cases}$

ข้อสังเกต $\overline{y} = m\overline{x} + c$

2. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรง

1. **สมการพาราโบลา** $y = ax^2 + bx + c$

สมการปกติคือ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} y_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i + Nc \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{cases}$

2. **สมการเอกซ์โพเนนเชียล** $y = ab^x$ **หรือ** $\log y = \log a + x \log b$

สมการปกติคือ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \log y_i = N \log a + (\log b)\sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i \log y_i = (\log a)\sum_{i=1}^{N} x_i + (\log b)\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{cases}$

ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ 1 (มีนาคม 2548)

ตอนที่ 1 ข้อ 1-5 ข้อละ 2 คะแนน ข้อ 6-10 ข้อละ 3 คะแนน

1. ผลบวกของคำตอบของสมการ $12^x - 2(3^x) - 9(4^x) + 18 = 0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. พจน์ที่เป็นค่าคงตัวที่เกิดจากการกระจาย $(\tan x - 2\cot x)^8$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ในคณะกรรมการนักเรียนจำนวน 10 คน จะมีวิธีเลือกประธาน รองประธาน และเลขานุการ ได้กี่วิธี ถ้ากรรมการคนหนึ่งไม่สมัครที่จะเป็นประธาน

4. นายแดงนำเงินไปฝากธนาคารออมสินโดยฝากเดือนแรก 100 บาท เดือนต่อไปฝากเพิ่มขึ้นเดือนละ 5 บาททุกเดือน เมื่อครบ 2 ปี นายแดงนำเงินไปฝากทั้งหมดเท่าใด

5. กำหนดให้ $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ เป็นเวคเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการ $\overline{u} + 5\overline{v} - 2\overline{w} = \overline{0}$ โดยที่ $\overline{u} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ และ $\overline{u}$ ตั้งฉากกับ $\overline{v}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\overline{u}$ และ $\overline{w}$ แล้วค่าของ $|\overline{w}|\cos\theta$ เท่ากับเท่าใด

6. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, \ldots x_{13}$ โดยที่ $x_n = |5 - n|$ เมื่อ $n = 1, 2, \ldots, 13$ จำนวนจริง a ที่ทำให้ $\sum_{n=1}^{13} |x_n - a|$ มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด

7. กำหนดให้เส้นตรง $x = y$ ตัดวงรี $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ ที่จุด A และ B ถ้า F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรีนี้แล้ว $AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้พาราโบลารูปหนึ่งที่สมการเป็น $y^2 - 4y - 16 - 12 = 0$ ถ้า l เป็นเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสของพาราโบลารูปนี้ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - 2y + 5 = 0$ แล้ว ระยะตัดแกน y ของเส้นตรง l มีค่าเท่ากับเท่าใด

9. ถ้า $z_1 = 4(\cos 145^\circ + i\sin 145^\circ)$ และ $z_2 = \sqrt{3}(\cos 115^\circ + i\sin 115^\circ)$ แล้ว ค่าของ $|z_1 - z_2|^2$ เท่ากับเท่าใด

10. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมีสมบัติดังนี้

    $100 \le n \le 1000$

    45 และ 75 หาร n ลงตัว

    7 หาร n เหลือเศษ 3

    แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 ข้อละ 3 คะแนน

1. สำหรับเซต A และ B ใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้ <u>ผิด</u>
   1. ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $A \subset B'$ และ $B \subset A'$
   2. $A - (A \cap B) = A - B$
   3. $(A \cup B) - A = B$
   4. ถ้า $(A \cap B) = A$ แล้ว $A \subset B$

2. ข้อใดต่อไปนี้ <u>ผิด</u>
   1. เส้นตรง $y = 3x + 2$ ขนานกับเส้นตรง $3x - y - 4 = 0$
   2. เส้นตรง $y + 5x + 8 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $5y = x + 3$
   3. ระยะห่างระหว่างจุด $(0,0)$ กับเส้นตรง $3x + 4y - 10 = 0$ เท่ากับ 2
   4. ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $x - 2y + 5 = 0$ กับเส้นตรง $x - 2y - 5 = 0$ เท่ากับ 2

3. เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นเซตคำตอบของสมการ $9x^3 + 12x^2 + x - 2 = 0$
   1. $\{-2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\}$ 2. $\{-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$ 3. $\{-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ 4. $\{-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
   ก. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x)$
   แล้ว $g(x) = f'(x)$
   ข. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x และ $f'(a) \neq 0$
   แล้วความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{f(x)}$ ที่จุด a คือ $\frac{1}{f'(a)}$
   ข้อใดต่อไปนี้ถูก
   1. ก ถูก และ ข ถูก 2. ก ถูก และ ข ผิด
   3. ก ผิด และ ข ถูก 4. ก ผิด และ ข ผิด

5. ค่าของ $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้
   1. $(3.1, 3.2)$ 2. $(3.2, 3.3)$ 3. $(6.1, 6.2)$ 4. $(6.2, 6.3)$

6. ให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ ถ้า $[(p \to \sim q) \vee r] \wedge (q \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $(p \wedge s) \to r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u>
   1. $p \to q$ 2. $q \to r$ 3. $r \to s$ 4. $s \to p$

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็มแล้วข้อความ $\exists m \exists n\,[5m + 7n = 1]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y \big[(x^2 - 2x \geq y - 2) \wedge (y \geq \sin x)\big]$ คือ

$\exists x \forall y \big[(x^2 - 2x < y - 2) \vee (y < \sin x)\big]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก
2. ก ถูก และ ข ผิด
3. ก ผิด และ ข ถูก
4. ก ผิด และ ข ผิด

8. ถ้า $\dfrac{\sin^2 3A}{\sin^2 A} - \dfrac{\cos^2 3A}{\cos^2 A} = 2$ แล้ว $\cos 2A$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{4}$
2. $\dfrac{1}{2}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

9. ถ้า $\tan(\arccos x) = -\sqrt{3}$ แล้ว ค่าของ $x \sin(2 \arccos x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
2. $-\dfrac{1}{2}$
3. $\dfrac{1}{2}$
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

10. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. เซตคำตอบของ $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$ คือ $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}i, \sqrt{2} + i\}$

ข. $\left|\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^6 + \left(\dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^6\right| \leq 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก
2. ก ถูก และ ข ผิด
3. ก ผิด และ ข ถูก
4. ก ผิด และ ข ผิด

11. ให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log(\log x) + \log(9 - \log x^2) \geq 1$ ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ S ที่มีค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดตามลำดับแล้ว ab มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $10^{\frac{7}{2}}$
2. $10^{\frac{9}{2}}$
3. $10^{\frac{11}{2}}$
4. $10^{\frac{13}{2}}$

12. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2AB = I$ และ $AX = C$ แล้ว ค่าของ $x + y + z$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20
2. 24
3. 26
4. 30

13. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}4 & 12 & -9\\ 7 & -10 & 5\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ และ B,C,D เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $A\sim B\sim C\sim D$

โดยที่ B ได้จาก A โดยการดำเนินการ $R_1-\frac{4}{3}R_2$

C ได้จาก B โดยการดำเนินการ $5R_1$

D ได้จาก C โดยการดำเนินการ R_{23}

แล้ว $\det(D)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –3,750 2. –150 3. 150 4. 3,750

14. ถ้า a_n เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล

$1,2,2,3,3,3,\ldots,\overbrace{n,n,n,\ldots n}^{n}$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{2}{3}$

15. กำหนดให้ $f(x)=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{1-x} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ เมื่อ $x\neq 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $f^{-1}(x)=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{1-x} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$ เมื่อ $x\neq 0, x\neq 1$

2. f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $f^{-1}(x)=\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{1+x} & 1\end{bmatrix}$ เมื่อ $x\neq -1$

3. f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เนื่องจากมี x ที่ทำให้ $\det\begin{bmatrix}\frac{1}{1-x} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=0$

4. f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $(f\circ f)(x)=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{1-x} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^2$ เมื่อ $x\neq 1$

16. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}1, & x\leq 0\\ 0, & x>0\end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim\limits_{x\to 0^-}(f\circ f)(x)=0$ ข. $\lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ f)(x)=1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก 2. ก ถูก และ ข ผิด

3. ก ผิด และ ข ถูก 4. ก ผิด และ ข ผิด

17. ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น $2x - 4$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 10 หน่วย แล้ว พื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ กับแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 33 2. 36 3. 39 4. 42

18. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B โดยที่ $f(1) = 2$ หรือ $f(2) = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนคี่ แล้วจำนวนฟังก์ชัน f ที่มีสมบัติดังกล่าวเท่ากับข้อใด

1. 75 2. 150 3. 425 4. 500

19. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีดำ 4 ลูกและสีแดง 6 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบนี้มา 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละอย่างน้อยหนึ่งลูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.78 2. 0.80 3. 0.82 4. 0.84

20. ในการสุ่มหยิบเลข 3 หลักที่มากกว่าหรือเท่ากับ 100 มาหนึ่งจำนวน ความน่าจะเป็นที่เลขจำนวนนั้นมีเลข 8 อย่างน้อย 1 หลักและไม่มีเลข 9 ในหลักใด ๆ จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{8}$ 2. $\frac{1}{9}$ 3. $\frac{2}{8}$ 4. $\frac{2}{9}$

21. กำหนดสมการจุดประสงค์ $z = ax + by$ โดยที่ $a > 0, b > 0$ และมีอสมการข้อจำกัดคือ

$$\begin{aligned} x - 2y &\leq 0 \\ x + y &\geq 3 \\ 2x + y &\geq 4 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

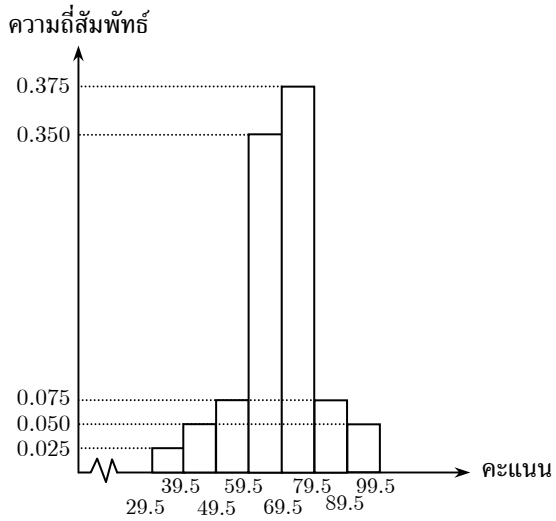
เมื่อ $z = 0$ จะได้เส้นตรง $ax + by = 0$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{3}{2}$ ถ้า z มีค่าน้อยสุดที่จุด (x_0, y_0) แล้วค่าของ $x_0 - y_0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -1 3. 1 4. 3

22. กำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1$ เท่ากับ 0.3413 ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมีจำนวน 20,000 คน มีการแจกแจงปกติแล้ว จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนซึ่งต่างจากคะแนนเฉลี่ยมากกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3,413 2. 6,348 3. 6,826 4. 13,652

23. กำหนดฮิสโทแกรมของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 80 คน ดังนี้



ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. นักเรียนที่สอบได้คะแนนระหว่าง 50-79 มีจำนวนมากกว่านักเรียนที่สอบได้คะแนน 90 คะแนนขึ้นไปเท่ากับ 50 คน
2. นักเรียนที่สอบได้คะแนน 90 คะแนนขึ้นไป มีร้อยละ 10 ของนักเรียนทั้งหมด
3. ควอร์ไทล์ที่หนึ่งของคะแนนสอบมีค่าอยู่ระหว่าง 60-69 คะแนน
4. ควอร์ไทล์ที่สามของคะแนนสอบมีค่าอยู่ระหว่าง 80-89 คะแนน

24. กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ตัดแกน Y ที่จุด 2 จุดแต่ไม่ตัดแกน X ข้อความในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $a^2 > c$ และ $b^2 > c$
2. $a^2 > c$ และ $b^2 < c$
3. $a^2 < c$ และ $b^2 > c$
4. $a^2 < c$ และ $b^2 < c$

25. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเต็ม m ที่มีสมบัติดังนี้

$50 \leq m \leq 100$

7 หาร m^3 เหลือเศษ 6

แล้วจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 14 3. 21 4. 28